

Círculos Matemáticos

Dmitri Fomin
Sergey Genkin
Ilia Itenberg

b
i
b
l
i
o
t
e
c
a
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



Título original: *Mathematical Circles (Russian experience)*.

American Mathematical Society, 1996.

Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz

Diseño: Dirección de Arte Corporativa de SM

Edición: Fernando Barbero González

Corrección: José Luis Guzmán

© **Autores:** Dmitri Formin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg.

Traducción y adaptación del inglés: Enrique Hernando Arnáiz

Revisión científica: Fernando Barbero González y Joaquín Hernández Gómez

Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la Colección: María Moreno Warleta

Comisión de la Real Sociedad Matemática Española:

Bartolomé Barceló Taberner

Universidad Autónoma de Madrid

Guillermo Curbera Costello

Universidad de Sevilla

Emilio Fernández Moral

IES Sagasta, Logroño

Joaquín Hernández Gómez

IES San Juan Bautista, Madrid

María Moreno Warleta

IES Alameda de Osuna, Madrid

Juan Núñez Valdés

Universidad de Sevilla

Victoria Otero Espinar

Universidad de Santiago

Encarnación Reyes Iglesias

Universidad de Valladolid

© Ediciones SM

ÍNDICE

PREFACIO	5
PRÓLOGO DE LA EDICIÓN RUSA	7
PARTE I. EL PRIMER AÑO	
CAPÍTULO 0. PROBLEMAS DE SENTIDO COMÚN	13
CAPÍTULO 1. PARIDAD.....	19
CAPÍTULO 2. COMBINATORIA1	25
CAPÍTULO 3. DIVISIBILIDAD Y RESTOS	37
CAPÍTULO 4. EL PRINCIPIO DEL PALOMAR	51
CAPÍTULO 5. GRAFOS 1	59
CAPÍTULO 6. LA DESIGUALDAD TRIANGULAR.....	71
CAPÍTULO 7. JUEGOS.....	79
CAPÍTULO 8. PROBLEMAS PARA EL PRIMER AÑO	91
PARTE II. EL SEGUNDO AÑO	
CAPÍTULO 9. INDUCCIÓN	109
CAPÍTULO 10. DIVISIBILIDAD 2	133
CAPÍTULO 11. COMBINATORIA 2	149
CAPÍTULO 12. INVARIANTES	169
CAPÍTULO 13. GRAFOS 2	183
CAPÍTULO 14. GEOMETRÍA.....	203
CAPÍTULO 15. SISTEMAS DE NUMERACIÓN	219
CAPÍTULO 16. DESIGUALDADES	229
CAPÍTULO 17. PROBLEMAS PARA EL SEGUNDO AÑO.....	243
APÉNDICE A. CONCURSOS DE MATEMÁTICAS	263
APÉNDICE B. RESPUESTAS Y SOLUCIONES	275
APÉNDICE C. BIBLIOGRAFÍA.....	349

Prefacio

En la historia de las matemáticas, la curiosidad por la resolución de problemas de ingenio ha sido un factor que ha contribuido a la creación matemática tanto o más que sus posibles aplicaciones prácticas.

Lluís A. Santaló

La matemática, una filosofía y una técnica

¿Qué son las matemáticas para un estudiante que acaba de empezar la Secundaria Obligatoria? Ha estudiado matemáticas todos los cursos desde los seis años y cree –porque se lo repiten continuamente– que son muy importantes; sabe realizar cálculos sencillos, reconoce figuras geométricas... Seguramente para él o ella las matemáticas son simplemente un instrumento con el que calcular y medir.

¿Cómo puede imaginar lo que las matemáticas tienen de reto, de juego y de creación?

¿Qué matemáticas puede presentar un profesor a esos alumnos que reclaman más de lo que ofrecen los currículos? ¿Qué hacer para iniciarlos en la actividad matemática despertando y manteniendo su interés?

¡Qué difícil es la respuesta! Y sin embargo, la matemática elemental encierra pequeños y grandes tesoros con los que incluso los más jóvenes pueden hacer matemáticas, conjeturando, relacionando, generalizando o demostrando.

Una de las posibles vías para mostrar a estos estudiantes otra cara de las matemáticas, para conseguir –haciendo un paralelismo con la música– que no se limiten a hacer escalas, sino que también interpreten pequeñas piezas, es a través de la resolución de problemas: al fin y al cabo, los problemas son el corazón de las matemáticas. Los matemáticos profesionales, cuando investigan, resuelven problemas. Pero si proponer un buen problema no es en absoluto una tarea sencilla, esta tarea se convierte casi en arte cuando los destinatarios, por su edad y grado de madurez intelectual, carecen de técnicas. No que-

da entonces más remedio que recurrir a las ideas, a la imaginación y a la creatividad. Hay que tener sensibilidad para calibrar adecuadamente lo que es posible resolver, para graduar la dificultad de lo que se propone. Y no solo eso, sino también lo que es realmente importante: hay que saber presentar el conjunto de manera atractiva, que interese y sorprenda, aprovechando esa curiosidad innata que tienen los niños y que con tanto mimo debemos alimentar. La elección de problemas debe mostrar, en la medida de lo posible, la gran belleza que encierran las matemáticas.

En este arte, los creadores de problemas de la antigua Unión Soviética han probado cumplidamente ser auténticos maestros, y estos “Círculos Matemáticos” son una excelente muestra de ello. A través de sus páginas, el lector se enfrentará a pequeños retos que le engancharán rápidamente. Están agrupados alrededor de ideas –paridad, invariantes, juegos de estrategia...– sencillas, pero profundas y fructíferas, como lo son las buenas ideas en matemáticas. Son pocos los conocimientos previos para poder enfrentarse a ellos, pero se van adquiriendo –congruencias, combinatoria, aritmética elemental–, de forma casi inconsciente, según se van resolviendo los problemas.

Un problema, un buen problema, como lo son los recogidos en este libro, tiene mucho de aventura. En esa especie de viaje a lo desconocido que significa adentrarse en ellos, los estudiantes de secundaria que lo emprendan, guiados por sus profesores, se encontrarán, seguro, con las matemáticas de verdad. Descubrirán que pueden enfrentarse con éxito a problemas difíciles y además disfrutar con ello.

Pero este viaje está abierto a cualquiera, estudiante o no, adolescente o adulto, que tenga afición por las matemáticas. Les animo a que lo realicen, esperando que disfruten con la experiencia tanto como yo misma sigo haciendo.

María Gaspar Alonso-Vega

Presidenta de la Comisión de Olimpiadas. RSME
Pozuelo de Alarcón, 25 de octubre de 2011.

Prólogo a la Edición Rusa

§1. Introducción

En un principio, escribimos este libro para ayudar a la gente de la antigua Unión Soviética que tenía que “ocuparse” de la educación matemática que se salía del currículo oficial: profesores de instituto y universitarios que participaban en programas de educación matemática de algún tipo, entusiastas diversos de los que participan en círculos y reuniones matemáticas o gente que lo único que pretendía era leer algo recreativo y matemático a la vez. Y, por supuesto, para aquellos estudiantes que querían trabajar este tipo de aspectos matemáticos por su cuenta.

Otra de las razones para escribir este libro fue que considerábamos necesario dejar constancia del papel que jugó la tradición que en educación matemática ha existido en Leningrado (actualmente, San Petersburgo) durante los últimos 60 años. Nuestra ciudad fue, de hecho, la cuna de la olimpiada matemática de la URSS (y en ella se celebraron los primeros seminarios matemáticos para estudiantes en 1931–32, y la primera Olimpiada de la ciudad, en 1934), y aunque aún sigue siendo líder en este área, su enorme experiencia educativa no ha sido debidamente documentada.



A pesar de la variedad estilística de los materiales que ofrecemos en este libro, es metodológicamente homogéneo. Proponemos, en nuestra opinión, la mayoría de los temas básicos necesarios en las sesiones de un *círculo matemático* en los dos primeros años de educación extraescolar (para estudiantes de, aproximadamente, 12–14 años de edad). Nuestro principal objetivo era hacer más fácil al profesor la preparación de las sesiones y la recopilación de problemas (o, lógicamente, a cualquier entusiasta dispuesto a pasar tiempo con jóvenes estudiantes, enseñándoles matemáticas de las que no aparecen en el *currículum*). Queríamos contar ideas matemáticas que fuesen importantes para los estudiantes y explicar cómo podemos llamar su atención hacia ellas.

Debemos destacar que el propio trabajo de preparar y dirigir una sesión de este tipo ya es, en sí mismo, un proceso creativo. Por esta razón, no sería prudente seguir nuestras recomendaciones a ciegas. Sin embargo, esperamos que este libro te proporcione material para la mayoría de sesiones. Sí parece más natural esta otra utilidad del libro: que antes de trabajar un tema matemático específico, el profesor lea y analice el capítulo correspondiente del libro, para después comenzar a construir un esbozo de la sesión. Lógicamente, habrá que hacer algunos ajustes en función del nivel de cada grupo de estudiantes. Como fuentes complementarias de problemas, recomendamos mirar [13, 16, 24, 31, 33], y [40].



Nos gustaría destacar dos puntos importantes de la tradición que existe en las actividades extracurriculares de educación matemática en Leningrado:

1. En las sesiones se da una comunicación viva y espontánea entre los estudiantes y profesores y cada estudiante es tratado, dentro de lo posible, de forma individual.

2. El proceso comienza a una edad bastante temprana: por lo general durante el 6^o grado (11–12 años de edad) y, a veces, incluso antes.

Escribimos este libro como guía especial para estudiantes de secundaria y sus profesores. La edad de los estudiantes, sin duda, debe influir en el estilo de las sesiones. Así pues, algunas sugerencias:

- a) Consideramos un error llevar a cabo una larga sesión, con los estudiantes más jóvenes, dedicada a un único tema. Creemos que es bueno cambiar la dirección de la actividad dentro de una misma sesión.
- b) Es necesario retroceder, de vez en cuando, y repasar los materiales que ya se vieron. Esto se puede hacer, por ejemplo, cuando usemos problemas de olimpiadas y otras competiciones matemáticas (ver apéndice A).
- c) Al tratar un tema, haz hincapié en los aspectos más importantes y, sobre todo, procura que comprendan perfectamente (¡no solo que memoricen!) las ideas involucradas.
- d) Recomendamos usar constantemente en las sesiones actividades lúdicas y juegos matemáticos, y que se discutan las soluciones y demostraciones que vayan surgiendo. También es importante utilizar pasatiempos, “acertijos” y paradojas matemáticas. Podéis encontrar material de este tipo en [5–7, 16–18, 26 - 30].

Tenemos que mencionar aquí a nuestros predecesores: aquellos que trabajaron antes que nosotros para crear una especie de antología de los círculos matemáticos de Leningrado. Sus libros: [32] y [43], no llegaron, por desgracia, a un gran número de lectores interesados en la educación matemática en la escuela secundaria.

En 1990–91, la Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS publicó la versión original de la primera parte de este libro a modo de colección de artículos [21] escritos por unos cuantos autores. Nos gustaría dar las gracias a todos nuestros colegas cuyos materiales utilizamos y trabajamos para la elaboración del presente libro: Denis G. Benua, Igor B. Zhukov, Oleg A. Ivanov, Alexei L. Kirichenko, Konstantin T.P. Kokhas, Nikita Yu. Netsvetaev y Anna G. Frolova.

Asimismo, expresamos nuestro más sincero agradecimiento a Igor S. Rubanov, cuyo artículo sobre “Inducción”, escrito con el objetivo de formar parte de la segunda parte del libro [21] (que, por desgracia, nunca se publicó) se incluye íntegro aquí en el capítulo así titulado.

Damos las gracias especialmente a Alexey Kirichenko, cuya ayuda durante las primeras etapas de confección de este libro no podemos olvidar. También nos gustaría agradecer a Anna Nikolaeva la elaboración de las figuras.

§2. Estructura del libro

El libro consta de esta introducción, dos partes principales, el apéndice A “Competiciones Matemáticas”, el apéndice B “Respuestas, Indicaciones, Soluciones” y el apéndice C “Referencias”.

La primera parte (*El primer año*) comienza con el capítulo cero, que consta de problemas de la prueba inicial que proponemos a estudiantes de 10–11 años de edad. Los problemas de este capítulo no tienen un contenido matemático específico, y su principal objetivo es detectar las habilidades de los estudiantes en matemáticas y lógica. El resto de la primera parte se divide en ocho capítulos. De ellos, los siete primeros se dedican a temas concretos, y el octavo (“Problemas para el primer año”) simplemente consiste en una recopilación de problemas de los temas anteriores.

La segunda parte (*El segundo año*) consta de nueve capítulos, algunos de los cuales solo continúan el estudio hecho en la primera parte (por ejemplo, los capítulos “Grafos–2” y “Combinatoria–2”). Los otros capítulos se componen de material que considerábamos demasiado complicado para el primer año: “Invariantes”, “Inducción”, “Desigualdades”...

El apéndice A habla de las cinco principales competiciones matemáticas de la antigua Unión Soviética. Estos concursos se pueden desarrollar en sesiones de *círculos matemáticos* o usarse para organizar concursos entre los diferentes *círculos* que puedan existir o incluso entre diferentes institutos y colegios.

Generalmente, las recomendaciones que hagamos a los profesores las marcaremos con la etiqueta “**Para los profesores**”. En algunas ocasiones, hablaremos de “Orientaciones metodológicas”, que normalmente contienen recomendaciones sobre metodología en la resolución de problemas: llaman la atención sobre los patrones básicos de las demostraciones o los métodos de reconocimiento y clasificación de problemas.

§3. Aspectos técnicos y leyenda

1. Hemos marcado los problemas más difíciles con un asterisco (*).
2. En el Apéndice B (“Respuestas, Indicaciones, Soluciones”) están recogidos casi todos los problemas del libro: bien sea la solución completa, una indicación o, al menos, la respuesta. Si es un mero problema de cálculo, por lo general solo proporcionamos la respuesta. No damos las soluciones a los problemas que hemos planteado para ser resueltos individualmente (esto, en particular, se aplica a todos los problemas de los capítulos 8 y 17).
3. Todas las referencias se puede encontrar al final del libro. Hemos marcado con un asterisco los libros que recomendamos especialmente.

Parte I. El primer año

Capítulo 0

Problemas de sentido común

En este capítulo proponemos una colección de 25 problemas sencillos. Para resolverlos basta un poco de sentido común y unas capacidades rudimentarias de cálculo. Son problemas que se pueden usar para comprobar las habilidades lógicas y matemáticas de los estudiantes o, simplemente, como entretenimiento.



Problema 1. En un vaso hay un cierto número de bacterias. Un segundo después, cada bacteria se divide en dos; al siguiente segundo, cada una de las bacterias resultantes se divide otra vez en dos, y así sucesivamente. Después de un minuto, el vaso está lleno. ¿Cuándo estaba el vaso medio lleno?

Problema 2. Ana, Juan y Alejandro suben al autobús para dar una vuelta por Disneylandia. Cada uno debe pagar 5 fichas por el paseo, pero solo tienen monedas por valor de 10, 15 y 20 fichas (cada uno posee un número ilimitado de cada tipo de monedas). ¿Cómo pueden hacer para que cada uno pague lo que le corresponde?

Problema 3. Juan arranca varias hojas seguidas de un libro. El número de la primera página que arranca es el 183, y sabe que el número de la última está escrito con las mismas cifras pero en distinto orden. ¿Cuántas hojas ha arrancado Juan del libro?

Problema 4. Tenemos 24 kilogramos de clavos en un saco. ¿Es posible pesar 9 kilogramos usando solo una balanza con dos platillos? (Véase la figura 1).

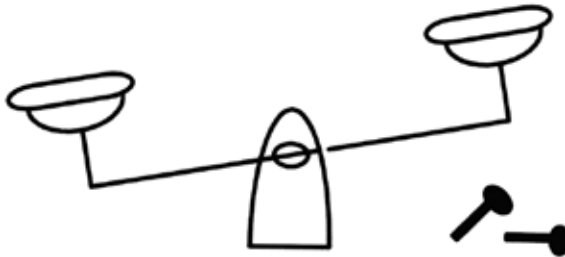


Figura 1

Problema 5. Una oruga quiere subir a un árbol de 75 metros empezando desde el suelo. Cada día sube 5 metros y cada noche baja 4. ¿Cuándo llegará a la cima del árbol?

Problema 6. En el mes de enero de cierto año hay exactamente cuatro viernes y cuatro lunes. ¿En qué día de la semana cae el 20 de dicho mes?

Problema 7. ¿Cuántos cuadrados atraviesa la diagonal de una mesa rectangular de 199×991 cuadrados?

Problema 8. Borra 10 cifras del número 1234512345123451234512345 de forma que el número que quede sea lo más grande posible.



Problema 9. Pedro dice: “Anteayer yo tenía 10 años, pero el próximo año cumpliré 13. ¿Es posible esto?”

Problema 10. La gata de Pedro siempre estornuda antes de que llueva. Ha estornudado hoy. Esto significa que va a llover, piensa Pedro. ¿Es cierto?

Problema 11. El profesor trazó varios círculos sobre una hoja de papel. Entonces preguntó a un estudiante: “¿Cuántos círculos hay aquí?”. “Siete”, le contestó. “Correcto”, dijo el profesor. “¿Cuántos círculos hay aquí?”, preguntó el profesor a otro estudiante. Y este respondió: “Cinco”. “Totalmente cierto”, aclaró el profesor. ¿Cuántos círculos había dibujados en realidad en la hoja?

Problema 12. El hijo del padre de uno de los maestros de un colegio está hablando con el padre del hijo de este respetado miembro del claustro que, sin embargo, no toma parte en la conversación. ¿Cómo puede ser esto posible?

Problema 13. Tres tortugas avanzan por una carretera recta y en la misma dirección. La primera tortuga dice: “Dos tortugas están detrás de mí”. La segunda tortuga añade: “Una tortuga está detrás de mí y otra está delante”. La tercera tortuga dice: “Dos tortugas están delante de mí y una tortuga está detrás”. ¿Cómo puede ser posible esto?

Problema 14. Tres escolares van montados en un vagón. El tren pasa por un túnel durante varios minutos, y ellos se ven invadidos por la oscuridad. Cuando salen del túnel, cada uno ve que las caras de sus compañeros se han puesto negras con el hollín que entra a través de la ventana abierta. Empiezan a reírse de los otros, pero, de repente, el más astuto de todos se da cuenta de que su cara debe de estar también sucia. ¿Cómo llegó a esta conclusión?

Problema 15. Se echan tres cucharadas de un vaso de leche en un vaso de té y se mezclan totalmente. Después se echan tres cucharadas de esa mezcla en el vaso de leche. Qué es mayor ahora, ¿el porcentaje de leche en el té o el porcentaje de té en la leche?



Problema 16. Forma un cuadrado mágico con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; esto es, colócalos en las casillas de una tabla de 3×3 de tal modo que todas las sumas de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales sean iguales.

Problema 17. En una suma, los números son remplazados por letras (igual cifra, misma letra; diferente cifra, distinta letra). El resultado es $\text{LOVES} + \text{LIVE} = \text{THERE}$. ¿Cuántos LOVES son THERE ? La solución es el máximo valor posible de la palabra THERE .

Problema 18. El servicio secreto de la federación interceptó un mensaje codificado que decía: $\text{BLASE} + \text{LBSA} = \text{BASES}$. Se sabe que cifras iguales están codificadas con letras iguales, y cifras diferentes con letras diferentes. Dos ordenadores gigantes encontraron dos soluciones distintas. ¿Es esto posible o uno de los ordenadores necesita ser reparado?

Problema 19. Distribuye 127 monedas de un euro en siete monederos de tal modo que pueda pagarse cualquier cantidad entre 1 y 127 euros entregando monederos completos.



Problema 20. Recorta la figura siguiente en cuatro figuras semejantes a la original y cuyas dimensiones sean la mitad que las de la original.

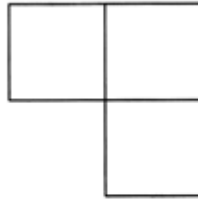


Figura 2

Problema 21. La figura siguiente está formada por cerillas. Mueve dos cerillas para transformar esta figura en cuatro cuadrados que tengan de lado una cerilla.

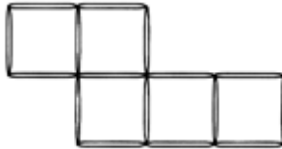


Figura 3

Problema 22. Un río de 4 metros de ancho tiene una curva de 90° . ¿Es posible cruzar el río haciendo un puente con solo dos tablones de 3,9 metros de largo cada uno?

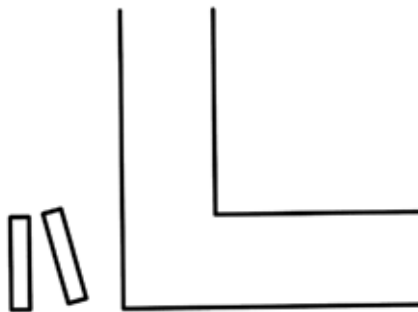


Figura 4

Problema 23. ¿Es posible colocar seis lapiceros largos y cilíndricos de tal forma que cada uno de ellos toque a todos los demás?

Problema 24. Usando unas tijeras, haz un agujero en un folio a través del cual pueda pasar un elefante.

Problema 25. Diez monedas están colocadas como se muestra en la figura. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que tenemos que quitar para que ningún grupo de tres monedas de las que queden estén situadas sobre los vértices de un triángulo equilátero?

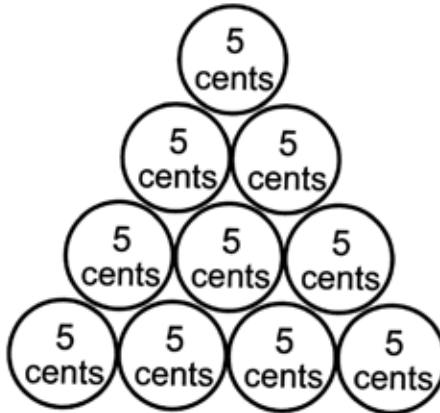


Figura 5

Capítulo 1

Paridad

El concepto de paridad (par o impar), a pesar de su gran simplicidad, aparece en la solución de los más variados tipos de cuestiones. Resulta útil en la resolución de muchos problemas, incluyendo algunos bastante difíciles.

Su sencillez nos permite proponer problemas para estudiantes que cuenten con muy pocos conocimientos técnicos. Esto hace incluso más importante de lo habitual el insistir en la esencia común que tiene este tipo de problemas.

§ 1. Alternancias

Problema 1. Once engranajes están colocados en el plano formando una cadena como la que se muestra en la figura. ¿Pueden girar todos ellos a la vez?

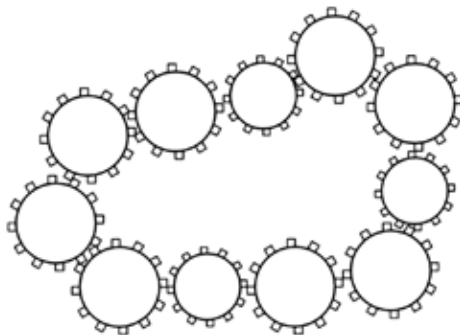


Figura 6

–Solución. La respuesta es que no. Supongamos que el primer engranaje gira en el sentido de las agujas del reloj. Entonces, el segundo engranaje debería rotar en el sentido opuesto a las agujas; el tercero, en el sentido de las agujas de nuevo; el cuarto, en sentido inverso, y así sucesivamente. Está claro que los engranajes impares deben girar en el sentido de las agujas del reloj, mientras que los pares deben rotar en el sentido opuesto a las mismas. Por tanto, los engranajes 1 y 11 deben girar en el mismo sentido, algo claramente imposible.

La idea principal en la solución de este problema es que los engranajes rotan en el sentido de las agujas del reloj o en el opuesto de forma alternada. Encontrar objetos que se alternen es también la idea básica en la solución de los siguientes problemas.

Problema 2. En un tablero de ajedrez, un caballo comienza en la casilla $a1$ y vuelve a ella después de muchos movimientos. Demuestra que el caballo realiza un número par de movimientos.

Problema 3. ¿Puede un caballo que está en la casilla de un tablero de ajedrez ir hasta la casilla $h8$ pasando una sola vez por cada una de las demás casillas? (Nombramos las filas del tablero como a, b, c, d, e, f, g y h , y numeramos las columnas de izquierda a derecha desde la 1 hasta la 8. [N. del T.]).

–Solución. No, no puede. En cada movimiento, un caballo salta de una casilla de un color a una del otro color. Como el caballo debe realizar 63 movimientos, el último movimiento, que es impar, debe llevarlo a una casilla del color opuesto al de la casilla en la que empezó. Sin embargo, las casillas $a1$ y $h8$ son del mismo color.

Como en el problema 3, muchos de los que se proponen en este apartado consisten en probar que ciertas situaciones son imposibles. De hecho, cuando en un problema de esta sección se pide determinar si algo es posible, la respuesta es invariablemente negativa. Esto plantea alguna dificultad para estudiantes matemáticamente poco experimentados. Su primera reacción es de frustración; bien por no conseguir que se cumplan las condiciones exigidas en el enunciado (que no es posible satisfacer) o bien por ser incapaces de determinar que es imposible, al carecer de una idea clara de cómo hacerlo.

He aquí un problema sencillo, relacionado con los problemas de paridad que veremos más adelante en esta sección, que puede aclarar este punto.

¿Es posible encontrar cinco números impares cuya suma sea 100?

Una discusión acerca de esto permite averiguar qué estudiantes se dan cuenta realmente de que no encuentran la solución del problema, no porque no se les ocurra, sino por la propia contradicción que encierra. Está comprobado que las demostraciones por contradicción, así como las demostraciones de imposibilidad, son fuente de confusión para los alumnos. Los problemas de paridad son una forma simple y efectiva de introducir estos dos conceptos.

Problema 4. Construimos una línea poligonal cerrada con 11 segmentos. ¿Puede una recta que no contenga vértice alguno del polígono cortar cada uno de sus lados?

Problema 5. Tres discos de *hockey* A , B y C están en una pista de juego. Un jugador golpea uno de ellos de tal modo que pasa entre los otros dos. Lo hace 25 veces. ¿Puede volver a colocar los discos en sus posiciones iniciales?

Problema 6. Katia y sus amigos están de pie en un círculo, de forma que cada uno está entre dos del mismo sexo. Si hay cinco niños en el círculo, ¿cuántas niñas hay?

Hagamos notar aquí un principio adicional que se usa en la solución del problema anterior: en una cadena cerrada de objetos de tipos que se alternan hay tantos objetos de un tipo (en este caso, niños) como del otro (niñas).

§ 2. Haciendo parejas

Problema 7. ¿Podemos dibujar un camino cerrado compuesto por nueve segmentos de manera que cada uno de ellos corte solo a uno de los restantes?

–**Solución.** Si fuese posible tal tipo de camino, podríamos agrupar por parejas todos los segmentos que lo forman, pero, para ello, el número de segmentos debería ser par.

Resaltemos la idea principal utilizada en la resolución del problema anterior: si podemos agrupar los objetos de una familia por parejas, entonces habrá un número par de ellos. En lo que sigue se plantea una serie de problemas similares.

Problema 8. ¿Podemos cubrir un tablero de ajedrez de 5×5 con fichas de dominó de dimensiones 1×2 ?

Problema 9. Prueba que si un polígono convexo de 101 lados tiene un eje de simetría, dicho eje de simetría pasa por uno de sus vértices. ¿Qué se puede afirmar si el polígono tiene 10 lados?¹

Los problemas 10 y 11 hacen referencia a fichas de dominó rectangulares, de dimensiones 2×1 , que tienen grabados un cierto número de puntos (entre cero y seis) en cada uno de los dos cuadrados que las forman. Un juego de dominó consta de las 28 fichas que es posible construir, teniendo en cuenta las posibles distribuciones de puntos en las parejas de cuadrados. El juego consiste en hacer una cadena en la que los cuadrados adyacentes tengan igual número de puntos.

Problema 10. Al terminar una partida de dominó (en la que se han colocado todas las fichas) observamos que el primer número de la cadena es un 5. ¿Qué número aparece al final?

¹ Un polígono convexo es aquel en el que el segmento que une dos puntos interiores cualesquiera no se sale del polígono.

Problema 11. De un dominó retiramos todas las fichas que tengan algún cuadrado blanco. ¿Se puede construir una cadena usando todas las restantes?

Problema 12. ¿Es posible dividir un polígono convexo de 13 lados en paralelogramos?

Problema 13. Se colocan 25 damas en un tablero de 5×5 de tal modo que sus posiciones son simétricas respecto a una de las diagonales. Prueba que al menos una de las damas está colocada sobre la diagonal.

–Solución. Si ninguna de las damas estuviera sobre la diagonal, podrían ser agrupadas en parejas simétricas con respecto a ella. Por tanto, debe haber una dama (y, de hecho, un número impar de damas) colocada sobre la diagonal.

Al resolver este problema, los estudiantes tienen dificultades a menudo para entender que puede haber no solo una, sino cualquier otro número impar de damas en la diagonal.

Para este problema podemos formular la siguiente afirmación sobre particiones en parejas: si un cierto conjunto tiene una cantidad impar de objetos y los emparejamos, al menos uno de ellos se queda sin pareja.

Problema 14. Supongamos ahora que la posición de las damas en el problema 13 es simétrica con respecto a ambas diagonales del tablero. Prueba que una de las damas está colocada justo en el centro.

Problema 15. En cada una de las casillas de un tablero de 15×15 se escribe uno de los números 1, 2, 3, ... hasta el 15. Las casillas que son simétricas con respecto a una de las diagonales principales contienen números iguales, y no hay línea alguna o columna que tenga dos números iguales. Prueba que no puede haber dos números iguales en la diagonal principal.

§ 3. Pares e impares

Problema 16. ¿Es posible cambiar un billete de 25 rublos utilizando en total 10 billetes de 1, 3 o 5 rublos?

–Solución. No es posible. Esta conclusión se basa en una observación simple: la suma de una cantidad par de números impares es siempre par. Una generalización de este hecho es la siguiente: si una suma de varios números es par, entonces la cantidad de sumandos impares es par. Si el número de sumandos impares es impar, el resultado será impar, y si el número de sumandos impares es par, el resultado será par.

Problema 17. Pedro compró una libreta que tenía 96 hojas y las numeró del 1 al 192. Víctor, por su parte, arrancó 25 hojas del cuaderno de Pedro y sumó los 50 números de página de dichas hojas. ¿Puede ser el resultado de dicha suma igual a 1990?

Problema 18. El producto de 22 números enteros da uno. Demuestra que su suma no puede dar 0.

Problema 19. ¿Se puede formar un cuadrado mágico usando los 36 primeros números primos? (Un cuadrado mágico es una cuadrícula de 6×6 casillas numeradas en la que se cumple que la suma de los números de cualquier fila, columna y diagonal es idéntica).

Problema 20. Escribimos los números del 1 al 10 en una fila. ¿Podemos distribuir los signos $+$ y $-$ entre ellos de manera que el resultado de efectuar las operaciones que aparecen en la expresión final sea igual a 0?

Obsérvese que los números negativos también pueden ser pares e impares.

Problema 21. Un grillo salta a lo largo de una línea. Su primer salto es de 1 centímetro; su segundo salto, de 2 centímetros, etc. Cada salto puede llevarle a un punto de la línea situado a su derecha o a su izquierda. Prueba que, después de 1985 saltos, el grillo no puede acabar en el mismo lugar en el que empezó.

Problema 22. Escribimos los números 1, 2, 3, ..., 1984 y 1985 en la pizarra. Borrarnos dos cualesquiera de ellos y los reemplazamos por el valor absoluto de su diferencia. Después de repetir este proceso muchas veces, queda un único número en la pizarra. ¿Podría ser el 0?

§ 4. Problemas varios

En esta sección recogemos algunos problemas más difíciles. Las soluciones utilizan la idea de paridad, pero también consideraciones adicionales.

Problema 23. ¿Se puede recubrir un tablero de ajedrez de 8×8 con fichas de dominó de 1×2 de forma que solo las casillas $a1$ y $h8$ queden sin recubrir?

Problema 24. Cogemos un número de 17 dígitos, invertimos sus cifras formando un nuevo número y sumamos estos dos números. Demuestra que el resultado de esta suma tendrá al menos un dígito par.

Problema 25. De los 100 soldados de un destacamento, 3 están de guardia cada noche. ¿Puede suceder que, después de un cierto tiempo, cada soldado haya compartido su guardia exactamente una vez con cada uno de los otros soldados?

Problema 26. Elegimos 45 puntos entre los de la recta que pasa por los puntos A y B , de forma que ninguno de ellos esté en el segmento AB . Demuestra que la suma de las distancias de estos puntos al punto A no puede ser igual a la suma de las distancias de estos puntos al punto B .

Problema 27. Colocamos cuatro unos y cinco ceros sobre una circunferencia. Con estos números seguimos el siguiente procedimiento: entre cada dos números adyacentes colocamos un 0 si los números son diferentes, y un 1 si son iguales. Borrados después los números “viejos”. ¿Pueden ser iguales todos los números que nos queden después de repetir este proceso un cierto número de veces?

Problema 28. Cincuenta estudiantes, 25 chicos y 25 chicas, se sientan alrededor de una mesa redonda. Prueba que al menos uno de los 50 tiene por vecinos a 2 chicas.

Problema 29. Un caracol se mueve a lo largo de un plano con velocidad constante, girando en ángulo recto cada 15 minutos. Demuestra que solo podrá volver a su posición inicial tras un número entero de horas.

Problema 30. Tres grillos juegan a la pídola a lo largo de una línea. En cada turno, un grillo salta por encima de otro, pero nunca sobre los otros dos. ¿Pueden volver a la posición inicial tras 1999 saltos? (Véase la figura 7).



Figura 7

Problema 31. Entre 101 monedas, 50 son falsas, y se diferencian de las auténticas únicamente en el peso: un gramo de más o de menos. Pedro tiene una balanza que muestra la diferencia de pesos entre los objetos colocados en cada plato. Elige una moneda y quiere saber si es auténtica o falsa en tan solo una pesada. ¿Puede hacerlo?

Problema 32. ¿Es posible hacer una lista con los números del 1 al 9 de manera que quede una cantidad impar de números entre el 1 y el 2, entre el 2 y el 3, ..., y entre el 8 y el 9?