

Matemáticas de 3 a 7 años

La historia
de un Círculo
Matemático
para niños

Alexander Zvonkin

b
i
b
l
i
o
t
e
c
a
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



*Real
Sociedad
Matemática
Española*



Matemáticas de 3 a 7 años

La historia de un
Círculo Matemático
para niños

Alexander Zvonkin

b i b l i o t e c a
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



*Real
Sociedad
Matemática
Española*



Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz
Diseño: Dirección de Arte Corporativa de SM
Edición: Fernando Barbero
Corrección: Ricardo Ramírez
Ilustraciones: Mikhail Panov

© Autor: Alexander Zvonkin

© Real Sociedad Matemática Española y Ediciones SM

Revisión científica: Fernando Barbero, Luis Hernández Corbato y Esteban Serrano Marugán

Editor General de la Real Sociedad Matemática Española: Alberto Ibort

Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección: Luis Hernández Corbato

Comisión de la Real Sociedad Matemática Española:

Bartolomé Barceló Taberner
Universidad Autónoma de Madrid

Guillermo Curbera Costello
Universidad de Sevilla

Emilio Fernández Moral
IES Sagasta, Logroño

Joaquín Hernández Gómez
IES San Juan Bautista, Madrid

María Moreno Warleta
IES Alameda de Osuna, Madrid

Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla

Victoria Otero Espinar
Universidad de Santiago

Encarnación Reyes Iglesias
Universidad de Valladolid

Debido a la naturaleza dinámica de internet, SM no puede responsabilizarse por los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se remite en este libro.

ISBN: 978-84-675-8289-5

Depósito legal: M-17490-2015

Impreso en España / *Printed in Spain*

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Índice

Prólogo a la edición española	9
Prólogo a la edición americana	11
Introducción	21
• Diario de padres	21
• ¿Por qué un círculo? ¿Por qué un diario?	22
• ¿Se debería editar un diario?	24
• Reflexiones de un novato sobre matemáticas para prescolares	25
• Opiniones	28
• Breve historia de nuestro círculo	30
• Agradecimientos	33
• Descargo de responsabilidades	34
Capítulo 1. La primera sesión: narrativa y reflexiones	37
• Una sesión en acción	37
• La teoría del desarrollo intelectual según Piaget: ¿realidad o ilusión?	48
• ¿Para qué leer libros de psicología?	52
• ¿Por qué son necesarias las teorías?	56
Capítulo 2. El círculo matemático de los chicos. Primer año	59
• Sesión 21. La banda de Möbius	59
• Sesión 22. ¿Qué es más grande, el todo o una parte?	61
• Sesión 23. La torre de Hanoi	66
• Sesión 24. Un poco de topología	70
• Sesión 25. El niño del ascensor	72
• Sesión 26. Intersección de conjuntos	74
• Sesión 27. Cuadriláteros en el tablero perforado	75
• Sesión 28. Comenzamos con la teoría de la probabilidad	78
• Sesión 29. Sonoro fracaso	80
• Sesión 30. Verter agua	83
• Sesión 31. Otra vez teoría de la probabilidad	87
• Sesión 32. Diplomas	90
• Unos cuantos problemas más	92
• ¿Cómo dibujar un cubo?	96
Capítulo 3. Los niños y $\binom{5}{2}$: historia de un problema	99
• Un rompecabezas combinatorio	100
• Problemas equivalentes	101
• Denotar...	105

• Demostración matemática.....	107
• Física y lógica.....	110
Capítulo 4. El círculo matemático de los chicos. Segundo año.....	115
• Sesión 33. Semejanza.....	115
• Sesión 34. Una sesión sin contratiempos.....	119
• Sesión 35. A punto de calcular probabilidades.....	120
• Sesión 36. Juego con tres dados.....	123
• Sesión 37. ¿Cuántos rectángulos hay?.....	125
• Sesión 38. Se me va de las manos.....	127
• Sesión 39. De nuevo bajo control.....	130
• Breve excursión al pasado.....	131
• El lenguaje de programación <i>Niño</i>	135
• Sesión 40. Primer encuentro con los bloques de Dienes.....	141
• Sesión 41. Más de lo mismo (robots y bloques de Dienes).....	143
• Sesión 42. Copos de nieve.....	145
• Sesión 43. Sobre algunas propiedades de la suma.....	147
• Sesión 44. Cuadrados mágicos.....	152
• Sesión 45. Cadenas generalizadas.....	154
• Sesión 46. Problemas isomorfos.....	156
• Sesión 47. Fin de la historia sobre $\left(\frac{5}{2}\right)$	157
• Sesión 48. Afirmaciones verdaderas y falsas.....	159
• Un poco de programación solo con Dima.....	160
• Sesión 49. Pensando sobre símbolos.....	164
• Sesión 50. Doble aniversario.....	167
• Sesión 51. ¿Qué camino es más largo?.....	167
• Sesión 52. Descifrar un código.....	170
• Sesión 53. Árbol genealógico.....	172
• Sesión 54. Fin del año escolar.....	174
Capítulo 5. Notación, abstracción, matemáticas y lenguaje.....	181
• Símbolos para las palabras.....	181
• ¿Notación “simplificada”?.....	183
• Cada persona posee más de un tipo de inteligencia.....	185
• Enseñanza de las matemáticas como lengua materna.....	189
Capítulo 6. El círculo matemático de los chicos. Tercer año.....	193
• Sesión 55. Problemas lógicos.....	193
• Sesión 56. Capataz.....	196
• Sesión 57. ¿Quién es más serrático, Gobr o Stoon?.....	199
• Sesión 58. Planos.....	202
• Un largo paréntesis.....	204
• Sesión 59. ¿Qué ve la otra persona?.....	209
• Sesión 60. Reflexión.....	213
• Sesión 61. ¿Cómo sumar números invisibles?.....	215
• Sesión 62. ¿Qué habitación es más grande?.....	218
• Sesión 63. Razón frente a casualidad.....	220

• Sesión 64. Contra todo pronóstico, de nuevo.....	223
• Sesión 65. Homeomorfismo.....	227
• Sesión 66. Topología.....	230
• Sesión 67. Cuatro colores.....	231
• Bromas, conversaciones y rompecabezas variados.....	232
Capítulo 7. El círculo matemático de los chicos. Últimos seis meses.....	243
• Sesión 68. El enigma del calendario.....	243
• Sesión 69. Acertijos orales.....	246
• Sesión 70. Más programación.....	249
• Sesión 71. Acertijos de colegio... casi.....	252
• Sesión 72. Subprogramas.....	254
• Sesión 73. Números impares y cuadrados.....	258
• Sesión 74. La geometría de los números.....	260
• Sesión 75. Los mayas.....	262
• Sesión 76. Todo se termina tarde o temprano.....	264
Capítulo 8. En casa y en el colegio.....	267
• Discusiones matemáticas con agridulces digresiones sobre la escuela.....	267
• Alumnos de primero.....	285
Capítulo 9. El círculo matemático de las chicas. Primer año.....	291
• Introducción.....	291
• Sesión 1. La teoría del desarrollo intelectual según Piaget, otra vez.....	298
• Sesión 2. Príncipes y princesas.....	303
• Sesión 3. ¿Cuántas diferencias hay?.....	306
• Sesión 4. Construir a partir de un diagrama.....	309
• Sesión 5. Permutaciones.....	311
• Sesión 6. La rutina del niño.....	313
• Sesión 7. Jugar le gana la mano a la ciencia.....	314
• Sesión 8. Entre dos espejos.....	317
• Sesión 9. En el jardín.....	318
• Sesión 10. Cubos bicolors.....	322
• Sesión 11. Cincos.....	324
Capítulo 10. El círculo matemático de las chicas. Segundo año.....	325
• Sesión 12. Algo pasa con la teoría de la probabilidad.....	325
• Sesión 13. Intersección de conjuntos de nuevo.....	327
• Sesión 14. La torre de Hanoi.....	330
• Sesión 15. Torres de igual altura.....	331
• Sesión 16. Girar 90°.....	332
• Sesión 17. Copos de nieve.....	333
• Sesión 18. Caras, vértices y aristas de un cubo.....	334
• Sesión 19. El lobo, la cabra y la col.....	338
• Sesión 20. Una cadena con una diferencia.....	342
Esto no es un epílogo.....	347
Índice temático.....	350

Prólogo a la edición española

Este libro contiene una amplia colección de problemas, acertijos, actividades y puzles de contenido matemático, adecuados para niños de Educación Infantil y de los primeros años de Educación Primaria. Solo por ello ya debería ocupar un lugar destacado en los textos de matemáticas con vocación de divulgación y apoyo a la docencia. Seguramente debido a una visión reduccionista de en qué consisten las matemáticas elementales, existe un cierto vacío en lo que respecta a propuestas de matemáticas inteligentes dirigidas a niños de corta edad.

Pero este texto es mucho más que eso: contiene no solo las propuestas de problemas y actividades, sino también, y sobre todo, el relato de cómo un grupo de niños reacciona ante ellas: lo que entienden y lo que se les escapa, las ideas que se les ocurren (sean acertadas o erróneas), qué actividades captan su interés y cuáles les aburren.

En suma, se trata de un relato pegado a la realidad del proceso de aprendizaje que resulta del mayor interés para maestros, padres y, en general, para cualquier persona interesada en la educación, pues pocas cosas hay más reveladoras sobre el aprendizaje que indagar en los procesos mentales de un niño que se enfrenta a actividades que ponen en juego sus capacidades de imaginación, creación y razonamiento.

Un relato, en fin, en el que los niños son los auténticos protagonistas, como nos recuerda el autor con sus referencias casi continuas a las reacciones de los niños ante distintas actividades:

- ¿Y en general, en la vida, qué hay más, cuadrados o cuadriláteros?
- ¡Cuadrados! —responden los chicos a la vez sin el menor asomo de duda.
- Porque son más fáciles de recortar.

- El pino.
- ¿Por qué?

—Porque el pino es el más grande y el abedul es el más pequeño. Y el abeto es el más mediano.

—¡Yo sé contar hasta números muy grandes, pero nunca lo he intentado!

—¡Papá! ¡Ya lo hemos hecho! —me quedo atónito, porque efectivamente lo hicimos en aquella primera sesión hace exactamente dos años.

El texto es esencialmente un diario donde Alexander Zvonkin, matemático ruso, registró las actividades que desarrolló de forma regular (pero adaptada a la edad: sesiones de media hora con carácter semanal o quincenal, nada que ver con una “educación especial”) con un grupo de niños formado por sus dos hijos y algunos de sus amigos. Como el autor repite en varias ocasiones, que nadie espere encontrar en este libro un “método para enseñar matemáticas”; el objetivo es más modesto —y más interesante— porque en la transcripción de las sesiones se puede aprender de los aciertos —y de los fracasos— de sus planteamientos y también se puede apreciar de forma muy clara la dificultad del trabajo del maestro: lo importante que es saber estar en silencio mientras los niños toman la iniciativa y, por encima de todo, lo difícil que es enfrentarse a la situación de un niño atascado ante un problema y cómo hay que intentar darle la información mínima necesaria para sacarle de ese estado, sin revelarle más de lo imprescindible sobre el desarrollo de la actividad. Una experiencia vital llena de emoción que hace exclamar a su autor: *Casi me dan ganas de decir: “¡Al diablo las matemáticas! ¡Los niños son mucho más interesantes!”*.

Un vistazo a la lista de temas que se tratan en las sesiones (la banda de Möbius, un poco de topología, intersección de conjuntos, teoría de la probabilidad, $\binom{5}{2}, \dots$) puede sorprender al lector familiarizado con las matemáticas que estudian los niños en Educación Infantil y primeros cursos de Primaria. Uno de los mayores logros del libro es, justamente, mostrar cómo se pueden diseñar actividades que introducen conceptos matemáticos avanzados a niños de edades tempranas y, además, de forma que el niño tome la iniciativa y se convierta en protagonista de la actividad.

El texto puede ser consultado como fuente de ideas para diseñar actividades, aunque su lectura completa aporta el valor añadido de observar la evolución de los niños a lo largo de los años que dura la experiencia. En todo caso, estamos seguros de que su lectura enriquecerá la perspectiva de los lectores interesados en la enseñanza en general, y en la enseñanza de las matemáticas en particular.

Pedro Ramos Alonso

Profesor Titular de la Facultad de Educación de la Universidad de Alcalá
Madrid, 27 de octubre de 2015

Prólogo a la edición americana

Cuestión de cultura

En mi época de estudiante en la Universidad de Berkeley, a finales de los ochenta, mis compañeros americanos y yo sabíamos que los europeos del este eran simplemente *mejores*. No es que fueran genéticamente superiores; de hecho, un buen número de mis compañeros americanos, entre los que me incluyo, éramos descendientes de inmigrantes de Europa del Este y sabíamos que no éramos tontos. Muchos de nosotros habíamos obtenido excelentes resultados en olimpiadas matemáticas, incluso a escala internacional, pero en Berkeley, los europeos del este, tanto alumnos como profesores, eran conocidos por su *intensidad*. Los seminarios en los que predominaban los americanos tenían una duración razonable: una hora. Sin embargo, en un seminario ruso o rumano el debate podía prolongarse hasta bien entrada la noche. Algunos de nosotros decíamos en broma que los rusos en realidad venían de Krypton y adquirirían superpoderes cuando se instalaban entre nosotros.

Bromas aparte, nosotros, matemáticos en ciernes, comprendíamos que lo único realmente importante no era la inteligencia o el conocimiento puro y duro (los americanos tienden a rezagarse en esto último en comparación con alumnos de otras nacionalidades). Lo que realmente importaba era la *pasión*. La forma de alcanzar el éxito en las matemáticas, como en cualquier otra actividad, es que despierten en ti el interés, el amor y la obsesión. En esto, los europeos del este eran claramente superiores; poseían una ventaja cultural. Habían sido entrenados desde pequeños para amar las matemáticas con más intensidad.

Durante muchos años, en un tiempo que se remonta al menos a la era de los *Sputnik*, América ha padecido una especie de complejo de inferioridad educacional. Intentamos ponernos al día, buscando por todas partes los ingredientes secretos utilizados por otras naciones. ¿Deberíamos adoptar el currículo que siguen en Singapur?

¿Llevar a nuestros hijos a clases extraescolares en academias Kumon? ¿Enseñarles meditación? ¿Yoga?

Nada de esto es malo; examinar las prácticas de los demás tiene que ser, por fuerza, enriquecedor, pero no son los ingredientes lo verdaderamente importante. No existe una salsa mágica especial; lo que hace falta es una *cultura* de indagación intelectual que sea apropiada para nosotros.

De las muchas y muy loables técnicas didácticas que se utilizan en el mundo, una de las que más fascinan a la comunidad matemática americana es la de los *Círculos Matemáticos*¹ practicada en la Europa del Este. La mayoría de los Círculos Matemáticos poseen ciertos rasgos que los distinguen de simples clubes matemáticos.

En primer lugar, la integración es vertical: alumnos jóvenes interactúan con otros mayores, estudiantes universitarios, licenciados, matemáticos industriales, profesores e incluso investigadores de talla mundial, todos dentro de la misma sala. El círculo no es tanto una clase como una reunión de jóvenes aprendices con los ancianos de la tribu en un acto de transmisión de las *tradiciones*.

En segundo lugar, el “currículo”, si es que se puede denominar así, lo forman en su mayor parte *problemas* más que temas matemáticos. Un problema, a diferencia de un ejercicio, es una cuestión matemática que uno no sabe cómo abordar, al menos inicialmente². Por ejemplo, multiplicar 4 por 3 es un ejercicio para la mayoría de la gente, pero es un problema para un niño pequeño. Calcular 4^{37} también es un ejercicio, conceptualmente muy parecido al anterior y ciertamente más difícil, pero solo en el sentido “técnico”. Del mismo modo, la pregunta “calcula $\int_2^7 e^{5x} \sin 3x \, dx$ ” también es un ejercicio para estudiantes de cálculo en el que solo se necesita conocer el algoritmo correcto y cómo aplicarlo.

Los problemas, por el contrario, no se presentan vinculados a algoritmos concretos. Su propia naturaleza hace que sea necesario hacer *investigación*, lo que es al mismo tiempo un arte y una ciencia que requiere conocimientos técnicos combinados con estrategias psicológicas; lo que yo llamo las “tres ces”: concentración, confianza y creatividad. En los círculos matemáticos se transmiten estos conocimientos a los alumnos, no a partir de una educación formal, sino *practicando las matemáticas* y observando cómo las practican otros. Los estudiantes aprenden que un problema que merezca la pena resolver puede suponer no minutos, sino posiblemente horas, días y hasta años de esfuerzo. Trabajan con algunos de los problemas clásicos y descubren en qué medida pueden ayudarles a investigar sobre otros. Aprenden a no

¹ El término procede del ruso математический кружок, que significa literalmente “circulito matemático”.

² Mucha gente utiliza indistintamente las palabras *problema* y *ejercicio*. Estoy muy agradecido a Titu Andreescu (natural de Rumanía) por explicarme la utilidad de distinguir entre ambas; de hecho, esta distinción es bastante explícita en los libros de texto rusos desde los primeros cursos.

rendirse y a convertir los errores y fallos en nuevas oportunidades para seguir investigando.

En un Círculo Matemático, un niño aprende a hacer exactamente lo que hace un investigador matemático. De hecho, realiza una investigación independiente, pero a un nivel inferior, y con frecuencia, aunque no siempre, sobre problemas que ya han sido resueltos por otros.

Por último, en muchos Círculos Matemáticos se desarrolla una cultura similar a la que existe en un equipo deportivo con su intensa camaradería, respeto por el “entrenador” y sana competitividad (lo ideal es que el “entrenador” sepa dirigirlo bien). La cultura del Círculo Matemático se complementa en gran medida con competiciones de resolución de problemas denominadas “olimpiadas”.

Durante varios años, otros muchos matemáticos y yo mismo nos hemos esforzado para instaurar esta cultura de los Círculos Matemáticos en los Estados Unidos, pero no a fuerza de imponer modelos rígidos, sino reuniendo a “matemáticos adultos” y jóvenes con el propósito de trabajar sobre problemas interesantes. A lo largo de los últimos doce años aproximadamente, los círculos matemáticos han experimentado un auge rápido por todo el país, al que ha contribuido el Instituto para la Investigación de las Ciencias Matemáticas (Mathematical Sciences Research Institute, MSRI), de Berkeley. Estos círculos no se parecen demasiado entre sí ni tampoco son réplicas exactas de los círculos rusos. Existen diversos grados de intensidad, competitividad y rigor, y, además, estrictamente hablando, ninguno de ellos trabaja con niños pequeños. Los círculos matemáticos para alumnos de enseñanza preescolar son poco comunes.

Qué es este libro, qué no es, y por qué habría que leerlo

Estas preguntas nos llevan hasta el libro que tiene el lector en las manos. En 2006, el MSRI patrocinó un viaje a Rusia para visitar escuelas especializadas en matemáticas y círculos matemáticos de San Petersburgo y Moscú. Nuestro anfitrión en Moscú fue el extraordinario Centro para la Educación Matemática Continua de Moscú (Moscow Center for Continuous Mathematical Education, MCCME, siglas en inglés que seguiremos utilizando a lo largo del libro), del que se da más información en la página 34.

El MCCME acababa de publicar el libro de Alexander Zvonkin *Malyshi i Matematika (Los niños y las matemáticas)*, y nos cautivó el relato que hizo el autor sobre la experiencia de dirigir en su casa un Círculo Matemático para alumnos de preescolar durante los años ochenta. Regresamos de allí con el libro, uno de los “artefactos” que recogimos, con la esperanza de traducirlo al inglés.

Afortunadamente, la mujer de Zvonkin, Alla Yarkho, era profesora de inglés, y se encargó de preparar una traducción preliminar que más tarde fue modestamente editada y anotada hasta convertirse en esta versión.

Como sabe cualquiera que haya enseñado o criado a algún niño, la enseñanza de las matemáticas a niños pequeños es todo un misterio. ¿De qué son capaces? ¿Qué es lo primero que deberían aprender? ¿Cuánto deberían esforzarse? ¿Es necesario que tengan que esforzarse? ¿Habría que presionarlos o dejarlos a su aire?

No hay una respuesta correcta a ninguna de estas preguntas y Zvonkin las trata al estilo clásico de los Círculos Matemáticos: no hace una pregunta y luego la responde, sino que nos muestra el problema —ya sea matemático o pedagógico— y describe lo ocurrido. Su libro es un relato de lo que hizo, las distintas tácticas que utilizó, las que funcionaron y las que no, pero, por encima de todo, es un relato de *las experiencias de los niños*.

Este libro no es una guía y no pretende mostrar cómo crear precoces investigadores de éxito. Es la historia personal de las enseñanzas que un matemático intentó transmitir a media docena de escolares. Por otro lado, para quien esté interesado en organizar un Círculo Matemático o educar a sus hijos en casa, este libro constituirá sin duda una valiosa fuente de inspiración. No es un manual sobre “cómo enseñar”, sino más bien un diario que nos cuenta “esto es lo que ocurrió”.

Zvonkin describe con todo detalle las diferentes actividades creativas que llevó a cabo, pero es mucho más que un relato matemático. Sitúa el foco de atención más en los niños que en las matemáticas, en un esfuerzo constante por introducirse en sus cabezas y ver el mundo a través de sus ojos.

¿Lo consigue? ¡No siempre! De hecho, lo más sorprendente de este libro, uno de sus mayores encantos, reside en que parte de lo que relata son fracasos. Como alguien capaz de resolver problemas de manera ejemplar, Zvonkin pone a prueba varias ideas y trata de ver si funcionan. Si no lo hacen —algo que ocurre con más frecuencia de la que podríamos suponer—, intenta comprender el porqué y continúa con algo distinto. Así es como se hacen las matemáticas y así es como funcionan los círculos matemáticos para escolares.

De todas formas, no hay que preocuparse, Zvonkin no sometió a los chicos a una batería de extraños experimentos. Sus “fracasos” fueron pequeños en comparación con lo mucho que consiguió. Tanto si la “actividad” funcionaba como si no, lo que consiguió fue suscitar un interés serio, y hasta el cariño, de un grupo de niños muy pequeños hacia las matemáticas.

¿Cómo lo hizo? El lector tendrá que leer el libro para averiguarlo. Todas y cada una de sus páginas contienen una idea educativa inteligente, un problema matemático interesante y una historia divertida e inspiradora al mismo tiempo. Es imposible, por no decir injusto, reducir el libro a una enumeración somera de puntos. Con todo, y dado que se trata de la edición americana, lo que viene a continuación sería el “resumen ejecutivo”.

1. ¡Que sea divertido! Está claro que si los niños no se lo pasan bien con algo, no le prestarán atención; es una cuestión de sentido común, pero también algo más

complejo. La diversión alivia el estrés, contribuye a la creación del concepto de comunidad y mejora la confianza. Zvonkin da muchos ejemplos que demuestran que la risa mejora cualquier situación.

2. Prepárate concienzudamente, aunque las cosas al final no salgan siempre como uno las planea. Zvonkin en ocasiones critica su falta de preparación y no pocas veces se le ocurren las cosas sobre la marcha, pero un rasgo destacable de su círculo era la amorosa atención que tanto él como su esposa, Alla, dedicaban a idear y preparar una multitud de tarjetas, dibujos, juegos, etc. Las casualidades afortunadas, algunas de bastante éxito, no surgen de la nada, sino que tienen su origen en muchas horas de reflexión y trabajo previos.
3. Reconoce la individualidad de cada niño. Otra idea de sentido común, pero que a menudo se olvida. Cada niño no solo es diferente, sino que cambia por momentos. Zvonkin se juzga a sí mismo con dureza, hasta el punto de confesarse en no pocas ocasiones como una persona impaciente e insensible, pero lo cierto es que esta autocrítica introspectiva es lo que mantiene la conexión entre los niños y él. Solo los profesores a los que preocupa su posible falta de sensibilidad pueden llegar a escuchar realmente a sus alumnos. De hecho, este libro no es más que un diario en el que su autor fue anotando detalladamente los resultados de escuchar, observar y leer la mente.
4. Utiliza objetos físicos (“materiales manipulativos”) siempre que sea posible con el objeto de suscitar el interés de los niños hacia el mundo “real”. Los niños no aprenden a base de escuchar sentados una charla. Ellos tienen que tocar, moverse, contar, recortar, pegar, dibujar, etc.; algo especialmente importante en esta era moderna dominada por los ordenadores. Zvonkin cuenta una conmovedora historia titulada “¡Puedes tocarlo!” (p. 288) en la que unos niños en clase de informática prefieren jugar con una antigua calculadora que tiene una manivela que da vueltas. A lo largo del libro nos damos cuenta de que las personas, en general, no solo los niños, no pensamos sumergidos en el vacío. Parte de lo que nos distingue como humanos es la conexión que tenemos con el mundo físico. Los profesores que no tienen esto en cuenta corren el riesgo de no llegar a sus alumnos.
5. No expliques demasiado. Deja que los niños lleguen a sus propias conclusiones. Cualquier profesor o padre sabe que esto es más fácil de decir que de hacer, y Zvonkin da numerosos ejemplos de su lucha particular por dejar a sus niños equivocarse y enfrentarse a las dificultades; también de la inmensa alegría que siente al ver que son capaces de afrontar cuestiones difíciles que se plantean ellos mismos.
6. Sé flexible, incluso a la hora de interpretar las normas anteriormente citadas. Un tema recurrente en el libro es el peligro de caer en la rigidez. Zvonkin descubre que las mejores sesiones son las que estando bien preparadas dan lugar a afortunadas situaciones imprevistas, es decir, aquellas en cuya preparación ha inver-

tido mucho tiempo pero que no salen como había planeado, lo que le obliga a cambiar el enfoque. Por el contrario, algunas de las peores experiencias tienen lugar cuando se ciñe al plan establecido pese a lo que le dice su análisis de las circunstancias.

Una última regla podría ser: “no vaciles en pedir ayuda a otras disciplinas”. El propio Zvonkin se aventuró en las profundidades de la informática y la psicología del desarrollo y en su libro se incluyen consideraciones interesantes sobre el aprendizaje de los niños en general. No es ningún experto, la muestra es pequeña y, por tanto, dichas consideraciones tienen bastante de especulación aunque inciten a la reflexión. Porque al final, el objetivo real no es hacer que los niños piensen en las matemáticas, por maravilloso que esto pueda ser; el verdadero objetivo es hacer que los niños piensen. Así de simple.

Puede que el lector americano se sorprenda, igual que me ocurrió a mí, al leer la severa crítica que hace Zvonkin sobre el sistema educativo soviético. Nuestro complejo de inferioridad nos lleva a pensar que otros sistemas educativos tienen que ser mejores. Este libro muestra una situación más compleja: no es en los centros educativos en sí donde radica la diferencia, sino en la cultura extracurricular que complementa su labor o, como Zvonkin podría argumentar, la contrarresta. Para Zvonkin, la escuela no es tan diferente de la americana: es un trámite que hay que soportar, mientras que el verdadero aprendizaje tiene lugar en otro lugar. En la escuela aprendes algoritmos. En el Círculo aprendes a investigar mientras te diviertes.

Cómo utilizar este libro

Esperamos que este libro llegue a un público amplio: profesores, padres, matemáticos y alumnos. Dado que posiblemente algunos de los lectores no se dediquen a las matemáticas de forma profesional, nos hemos esforzado por hacer un libro lo más accesible posible. Contiene gran cantidad de notas explicativas, así como un índice temático breve pero útil que da referencias únicamente sobre asuntos matemáticos, pedagógicos y psicológicos. Los temas que aparecen en negrita son de especial importancia. Es posible que el lector relativamente nuevo en el mundo de los círculos matemáticos quiera comenzar buscando referencias a **problemas populares** para ir ganando tiempo. Del mismo modo, las referencias a los **materiales manipulativos** dan fe de la variedad de objetos utilizados por Zvonkin.

Utilizados de este modo, el índice temático y las notas permiten que el lector impaciente vaya directamente al punto que le interesa y pueda encontrar ideas que le resulten útiles en sus propias aventuras educativas. En cualquier caso, el lector debería leer el libro entero, ya que, tal y como he mencionado, no se trata de un catálogo de recursos de enriquecimiento curricular.

Es posible que los lectores que se acerquen por primera vez al mundo de los círculos matemáticos para niños quieran explorar otros recursos que los ayuden a situarse.

Zvonkin describe muchos de los libros que utilizó, pero la mayoría son rusos. A continuación paso a enumerar una serie de excelentes complementos a este libro en lengua inglesa. En cualquier caso, el lector deberá tener en cuenta que todos ellos hacen uso de matemáticas más avanzadas que las utilizadas aquí.

- Leer, aunque solo sea eso, cualquier escrito de Martin Gardner, el antiguo editor de la columna de *Scientific American* titulada “Mathematical Games” (“Juegos Matemáticos”³). Dichas columnas han aparecido recogidas en distintos volúmenes, y muchas de ellas están disponibles actualmente en CD.
- Existen muchos otros libros excelentes que describen los Círculos Matemáticos. Dos de ellos forman parte de la serie *Mathematical Circles Library*, en concreto: *Circle in a Box*, de Sam Vandervelde, y *A Decade of the Berkeley Math Circle: The American Experience*, volumen 1, de Zvezdelina Stankova y Tom Rike. Los dos están llenos de detalles específicos y prácticos sobre diversas actividades. Además, *Mathematical Circles*, de Fomin, Genkin e Itenberg (American Mathematical Society, volumen 7 de la colección *Mathematical World*) es un relato muy recomendable sobre actividades realizadas en círculos matemáticos rusos con chicos más mayores⁴.
- Muchos libros escritos recientemente contienen ideas fantásticas sobre problemas y actividades interesantes. Personalmente, mis dos favoritos son *A Mathematical Mosaic*, de Ravi Vakil, y *Solve This*, de James Tanton. Ambos se centran en material bastante elemental. El segundo en particular es uno de los pocos libros que prestan atención a actividades *sobre física*.
- Aparte de la Wikipedia (que es bastante fiable en matemáticas en comparación con la política, por poner un ejemplo), existe un gran abanico de recursos en línea. El anteriormente citado MCCME contiene gran cantidad de artículos en inglés⁵. *Cut the Knot*⁶ es una página que contiene gran cantidad de material, una miscelánea interactiva sobre matemáticas, mantenida por un inmigrante ruso, Alexander Bogomolny. Una visita a la National Association of Math Circles⁷ (Asociación Nacional de Círculos Matemáticos) y la *Math Teachers’ Circle Network*⁸ es una estupenda forma de introducirse en la creciente comunidad de Círculos Matemáticos de los Estados Unidos. Además de encontrar ayuda en cuestiones matemáticas, es una forma muy útil de hacer contactos.

³ Esta sección existía también en la versión española de la revista: *Investigación y Ciencia*.

⁴ Editado en la Biblioteca Estímulos Matemáticos con el título *Círculos matemáticos*. (N. del T.).

⁵ <http://www.mccme.ru>

⁶ <http://cut-the-knot.com>

⁷ <http://mathcircles.org>

⁸ <http://mathteacherscircle.org>

Finalmente y a un nivel más avanzado, el mejor sitio web del mundo para encontrar actividades sobre resolución de problemas, al menos en inglés, es *The Art of Problem Solving*⁹. Esta página web incluye foros, clases en línea, libros, etc.

Nota sobre nombres y centros educativos rusos

Nombres rusos

La mayoría de los nombres que aparecen en el libro son apodos. En el caso de los personajes que aparecen repetidamente, utilizamos sus equivalentes apodos ingleses¹⁰.

Tabla de equivalencias.

Apellido traducido	Apellido ruso	Nombre de pila	Sexo
Andy	Andryusha	Andrei	Hombre
Dima	Dima	Dmitry	Hombre
Dinah	Dina	Dina	Mujer
Jane	Zhenya	Evgenia	Mujer
Gene	Zhenya	Evgenii	Hombre
Pete	Petya	Pyotr	Hombre
Sandy	Sanya	Aleksandra	Mujer
Sasha	Sasha	Aleksandr	Hombre

Cursos y calificaciones

En Rusia, los niños empiezan a ir al colegio entre los seis y los siete años de edad, aproximadamente un año más tarde de la edad a la que los niños americanos empiezan en la guardería. La escuela primaria dura cuatro años. Lo que en Estados Unidos es un “grado” (curso), en Rusia es una “clase”; por tanto, se dice que un niño está en primera clase para decir que está en primer curso. Estos alumnos son *первоклассник* (*pervoklassnik*), lo que hemos traducido como “alumnos de primer curso”. A veces hemos utilizado la expresión “año escolar” o simplemente “año” para cursos superiores, dado que, por ejemplo, en Rusia la décima clase no se corresponde en modo alguno con el décimo curso americano. De hecho, en la época en que se escribió el libro se habría correspondido más con el duodécimo curso, el último año antes de ir a la universidad.

⁹ <http://artofproblemsolving.com>

¹⁰ Se trata de una decisión del editor de la serie de libros en inglés a la que pertenece este. Su objetivo era evitar cierto aire extranjero que no está presente en el original ruso. En la traducción española hemos optado por conservar los apodos en inglés. (N. del T.).

El sistema de calificación ruso sigue una escala de cinco puntos, donde 5 es la nota más alta (equivalente a la A del sistema americano), y 1, la más baja y rara vez utilizada (un 2 también es suspenso).

Agradecimientos

La edición americana de este libro no habría sido posible sin la inestimable ayuda —en muy diversos modos— de Tatiana Shubin, Mark Saul, Alla Yarkho y el MSRI (especialmente David Eisenbud, Jim Sotiros y Silvio Levy). Por supuesto, siempre estaré en deuda con Alexander Zvonkin.

Paul Zeitz

Catedrático de la Universidad de San Francisco.

Introducción

Diario de padres

Este libro es un ejemplo de lo que podríamos llamar un “diario de padres”. Los hijos van creciendo y los padres anotan diligentemente en un cuaderno las cosas que les van ocurriendo. Leer estas anotaciones años más tarde resulta de lo más interesante, sobre todo para los padres. Esto no es de extrañar, ya que el diario trata de sus propios hijos cuando eran pequeños y, de manera indirecta, sobre ellos mismos cuando eran más jóvenes.

¿Cuántas veces, querido lector, has tenido que mirar fotos de niños, no ya tuyos, sino de los demás? Llega una visita a casa, sacan un taco de fotos y empieza el pase. Después del segundo paquete, uno trata de disimular los bostezos, pero los invitados insisten en llegar al final. Para ellos, todo lo relacionado con sus hijos o nietos resulta extremadamente fascinante, mientras que tú no dejas de pensar que todos los niños son prácticamente iguales.

Ahora, al presentar este libro, me encuentro en una situación parecida y admito que esto despierta en mí sentimientos encontrados. Me gustaría ser un observador objetivo e imparcial, pero no puedo. Mi esposa, Alla Yarkho, suele mostrarse severa y exigente en sus críticas, pero cada vez que coge el libro y comienza a releerlo es incapaz de parar. Nuestra actitud habitualmente irónica se evapora y en su lugar aparecen emociones completamente diferentes.

Este libro trata de nuestro hijo Dima y de nuestra hija Jane. Habla de cuando eran pequeños y también sobre sus amigos, aunque, como es de esperar, observamos con más atención a nuestros hijos que a los otros niños. La difícil pregunta es ahora: ¿por qué habría de resultar interesante este libro para otra gente? ¿Por qué tendría que ser interesante, no solo para nuestra familia, sino para los que no pertenecen a ella?

Supongo que la respuesta es que este libro no es únicamente un diario de las actividades de mis hijos, sino un diario del funcionamiento de un Círculo Matemático. Cuando Dima tenía tres años y diez meses, reuní a tres de sus amiguitos, de la misma edad o algo mayores, y formé con ellos un Círculo Matemático. Este libro trata sobre esa inusual experiencia. Puede servir como libro de ejercicios y acertijos mate-

máticos para niños de preescolar; pero también describe las reacciones de los pequeños, lo que comprendieron y lo que no, y qué clase de problemas psicológicos y malentendidos encontré por el camino.

Lo más probable es que un libro de problemas de álgebra o geometría, acompañados de historias reales sobre cómo los alumnos se enfrentan a ellos, sea una lectura interesante para muchos, pero si esos alumnos son niños pequeños, la historia resulta incomparablemente más atractiva. La evolución de sus razonamientos, los caminos y las vueltas de su intelecto son más visibles, más vívidos.

Cuando puse en marcha el Círculo no imaginaba lo emocionante y apasionante que sería. El resultado fue que durante años mis lecturas trataron en gran parte sobre educación y psicología. Más tarde, el espectro se amplió para incorporar otras materias como la lingüística, la psiquiatría, la etología o la genética del comportamiento. Para mí supuso descubrir un inmenso mundo nuevo. Gané mucho con la experiencia, y todo gracias a mis niños.

Las matemáticas para preescolares son relativamente sencillas y, por tanto, accesibles para cualquier lector, no solo para los especialistas. Esto significa que los lectores potenciales forman un grupo bastante grande de profesores, padres, abuelos, amantes de las matemáticas, psicólogos, filósofos y cualquier otro perfil imaginable. En fin, creo que he conseguido convencerme de que mi libro puede interesar a muchas personas, no solo a mí, así que ahora, querido lector, ya puedo recomendarlo con la conciencia tranquila. De todas formas debo confesar, sin pecar de falsa modestia, que muchos amigos que leyeron el manuscrito me animaron a convertirlo en libro. Numerosas copias circularon primero por Moscú y después por el resto del mundo. El interés no ha disminuido en los últimos veinte años; ello ha sido un motivo más para hacer este libro.

¿Por qué un Círculo? ¿Por qué un diario?

Un Círculo, como cualquier otro tipo de actividad sistemática, es una forma de imponerse una autodisciplina. Se puede trabajar con niños sin Círculo alguno: de vez en cuando haces preguntas, pides que realicen alguna tarea y analizas los resultados después. Pero en el mundo real esto casi nunca funciona, y antes de que te des cuenta, el proyecto termina por evaporarse: ayer estabas muy ocupado, hoy no estás de humor o te sientes demasiado cansado. ¿Y por qué tiene que ser precisamente ahora? Seguro que más adelante tendré tiempo en algún momento, quizá hoy o quizá otro día... La consecuencia de todo esto es que al final no se consigue prácticamente nada. Por el contrario, si sabes que mañana a las once en punto darás la bienvenida a cuatro niños y tendrás que entretenerlos durante media hora, la situación cambia radicalmente. Quieras o no, vas a tener que encerrarte en algún sitio a preparar algo. Si no se te ocurre nada, tendrás que recurrir a algún libro, y cuando le dedicas tiempo a pensar, tarde o temprano surgen ideas que no habrías tenido de no haberte impuesto una obligación. También es posible que se te ocurra algo que

requiera una preparación como dibujar, usar tijeras o pegamento. Para llevarlo a cabo es necesario entonces un sentido de la obligación más concreto que la noble aspiración de hacer algo “por la familia”.

Por cierto, a los niños también les gustan los rituales en sus juegos. Si de repente un adulto empieza a entrometerse en ellos y a darles la tabarra con enigmas matemáticos, se enfadarán y querrán que dejen de interrumpirlos cuando están jugando. Una cosa muy distinta es que sepan que una vez a la semana, un día especial y a una hora determinada, nos reunimos para tratar de temas serios.

Esta es la respuesta breve a la pregunta: “¿Por qué un Círculo?”.

En cuanto al diario, no empecé a tomar anotaciones en un cuaderno nada más comenzar y, sobre todo, no me pareció que fuera muy importante para las sesiones. Como se ve, el diario comienza en la sesión número veintiuno. Las primeras “veinte semanas” no representan cinco meses como uno podría pensar, sino el doble, ya que no nos reuníamos durante las vacaciones de verano ni en otros períodos. No hay que pensar que porque hubiéramos decidido reunirnos con regularidad, una vez a la semana, cumplimos este propósito al pie de la letra. Un día, a los seis meses de comenzar, unos amigos me pidieron que les contara lo que habíamos estado haciendo. Encantado con la idea, intenté comenzar a hablar, pero en vez del aluvión de ideas y acertijos que pensé que me vendrían a la cabeza, me quedé extrañamente callado al darme cuenta de que, en realidad, solo me acordaba de unos pocos detalles. Ciertamente recordaba la sensación general de entusiasmo y la arrolladora energía de los niños que había experimentado en cada sesión, pero era como si los detalles exactos hubieran desaparecido por el camino. Me sentí como alguien al que le han cortado una pierna y sigue sintiéndola aunque ya no esté.

Jamás habría esperado semejante mala jugada de mi propia memoria y me sentí contrariado y avergonzado. Tras aquello, anoté lo poco que aún recordaba y decidí que a partir de ese momento, al final de cada clase, haría un resumen escrito de lo que hubiéramos hecho. De esta forma tendría, por lo menos, una lista de acertijos a la que podría recurrir para reconstruir el resto de la sesión, aunque intuí que una simple lista de cuestiones y problemas no bastaría para ello. Al poco tiempo hice mi primer “descubrimiento pedagógico”. Me di cuenta de que llevar un registro de los acertijos no tenía mucho sentido. No son los acertijos, ni tampoco sus soluciones, lo que resulta realmente interesante: lo importante es el proceso de resolución, el camino que conecta unos con otros. Se puede decir objetivamente que los problemas matemáticos para prescolares son sencillos (aunque idearlos no lo es en absoluto). Además, un niño puede tardar años en resolver un acertijo. No exagero. ¡Años! Hay varios ejemplos de ello a lo largo del libro. En todo ese tiempo la mente del niño no descansa, no deja de dar vueltas a las cosas como si estuviera poseído, siempre alerta a cualquier detalle que pudiera tener algo que ver con los acertijos matemáticos. Este proceso de búsqueda de soluciones es lo más interesante de todo.

Así que empecé a añadir más y más observaciones a los problemas de mi lista —historias y anécdotas— y comencé a incluir también no solo comentarios sobre matemáticas, sino también otros de carácter más general e incluso “teórico” que dieron como resultado esto que ahora tiene forma de libro.

La siguiente fase fue el proceso de retroalimentación entre el diario y el círculo. Cuando plasmas tus pensamientos en el papel surgen nuevas ideas, nuevos puntos de vista y nuevos problemas y temas de estudio. La comprensión se hace más profunda; incluso la capacidad de observar parece agudizarse. A veces te acuerdas de algo que pasó desapercibido en mitad de la excitación de la sesión y que podrías haber olvidado fácilmente si no lo hubieras anotado. Esta simbiosis entre el Círculo y el diario de sesiones funcionó tan bien que llegó un momento en que no podía imaginar uno sin el otro.

Por último, pero no menos importante, mis hijos, ahora ya adultos, también leyeron mi diario. Recuerdan bien muchas cosas, pero a veces su versión se contradice totalmente con la mía. Añadieron sus propios comentarios a petición mía, lo que sirvió para enriquecer aún más el proyecto. En palabras de un amigo, le aportaron un efecto estereoscópico.

¿Se debería editar un diario?

Creo que sí, estoy absolutamente a favor de ello. Hace tiempo, algunos autores solían decir cosas como: “Estas páginas no sufrirán la humillación de ser impresas”. Normalmente no eran sinceros al afirmar esto, ya que secretamente confiaban en que sus descendientes, emocionados y agradecidos, encontrarían sus obras y, encantados al ver la modestia y sinceridad de aquellos (“¿te das cuenta de que no tenía la intención de que vieran la luz?”), las publicarían, proporcionándoles así la gloria eterna. La verdad es que es muy fácil pillar a un autor así porque se pasa las horas explicándose a sí mismo muchas cosas que debería conocer perfectamente. En realidad, es el lector quien necesita todas estas explicaciones, no él.

Sin embargo, imaginemos que alguien escribe un diario para su exclusivo uso privado y por casualidad otra persona lo encuentra más tarde y lo lee. Este lector podría malinterpretar su contenido de mil formas. Supongamos, por ejemplo, que alguien en particular cuenta con todo mi respeto —rayano incluso en la adoración—, a pesar de lo cual soy perfectamente consciente de sus pequeños (o no tan pequeños) defectos y manías. Como yo he escrito el diario “solo para mí”, puedo permitirme algún comentario irónico, burlón o que refleje irritación sin necesidad de tener que recordarme a mí mismo que yo siento un gran respeto por esa persona. (“No creas que no respeto enormemente a esa persona”. ¿No creas? ¿Quién no tiene que creerlo?). Si leyera el diario alguien que desconociera mi relación con la persona aludida, podría malinterpretar mis comenta-

rios. Se quedaría únicamente con el sarcasmo sin ser consciente de mi profundo respeto por ella.

Pongamos otro ejemplo más pertinente. El tema del libro son los niños o eso parece. En realidad hablo únicamente de un aspecto de sus vidas, que no es otro que su relación con las matemáticas. Más exactamente, describo lo que ocurre durante un período de media hora una vez cada dos semanas. Sería una locura pensar que la vida de un niño puede reducirse de tal forma. Cada uno tiene sus áreas de interés, sus problemas y sus talentos. Pero si hasta yo mismo lo olvido a veces cuando leo el diario, ¿qué no le ocurriría al lector que ni siquiera conoce personalmente a los niños? No comprendería nada. (Desarrollo esta idea más adelante en el caso particular de mi hija. Véase p. 293). Por no mencionar el hecho de que los otrora niños ahora son adultos. Dentro de no mucho serán sus propios hijos quienes lean el libro protagonizado por sus padres y madres. El diario que un día pretendió ser un documental pasaría a ser ficción.

No sería exacto decir que mi diario era un documento íntimo estrictamente hablando. Se trató más bien de algo técnico. Lo escribí para mí, pero nunca guardé el contenido en secreto, sino que lo compartí de buena gana con todo aquel que mostraba interés. De todas formas, su naturaleza técnica ocasionó algunos problemas; por ejemplo, yo no explicaría para mí mismo el problema del lobo, la cabra y la col, ni daría detalles sobre el problema de las torres de Hanoi¹¹.

Además de esto, el texto original contenía gran cantidad de repeticiones, notas que había que descifrar y explicaciones adicionales. (He dejado algunas repeticiones como estaban, especialmente en los casos en que partiendo de las mismas premisas alcanzaba distintas conclusiones. De esta forma tiene un aspecto más auténtico).

Resumiendo, son muchas las razones, tanto éticas como técnicas, por las que mi diario requería una buena corrección. Por eso me negué durante muchos años a publicarlo tal y como estaba, pese a lo que me sugerían en mi entorno.

¿Por qué tardé tanto tiempo en corregirlo? ¿A qué me dediqué durante todo ese tiempo? Bueno, la vida es la vida... Sea como fuere, creo que ha llegado el momento de dejar de irse por las ramas y ponernos manos a la obra.

Reflexiones de un novato sobre matemáticas para prescolares

¿Cuándo comenzar?

Seguro que todos los lectores habrán visto esta escena muchas veces: una madre joven se esconde detrás de una cortina y al cabo de un momento sale sonriendo, dice "cu-cú... itras!" y vuelve a desaparecer. Su bebé celebra estas apariciones y

¹¹ Dos problemas clásicos que se discuten en las páginas 66 y 338.

desapariciones aplaudiendo y chillando de alegría. Los dos son tremendamente felices con este juego y ninguno de ellos imagina que lo que están haciendo tiene que ver con las matemáticas.

La última frase no la he escrito para provocar la sorpresa del lector ni para dejarlo anodado con una paradoja inverosímil. Lo digo en serio. Según los psicólogos, hasta los dieciocho meses, el principal obstáculo intelectual que se le presenta a un niño es el descubrimiento de la permanencia de los objetos. Esto significa que un objeto que no se ve no ha desaparecido por completo; sigue estando en alguna parte, aunque no lo veamos. El niño descubre que un objeto tan importante como su mamá, aunque se haya esfumado tras la cortina, sigue estando ahí y enseguida reaparecerá.

A medida que el niño crece, aumenta su comprensión del mundo. Una niña muy pequeña está jugando a algo que le resulta muy interesante: recoger los bloques de construcción desparramados por el suelo y dárselos uno a uno a su padre acompañando cada regalo con un grito de júbilo: "¡Toma!". Su padre los coge y la niña se ríe alegremente. La niña acaba de aprender la palabra "toma" y trata de utilizarla todo lo posible. De repente, sus torpes manitas cogen dos bloques a la vez. Se para a pensar un segundo y, ¡eureka!, le da los dos a su padre diciendo: "¡Toma-toma!".

Parafraseando a Pushkin, "seguir los pensamientos de un niño pequeño es un pasatiempo realmente fascinante"¹². A los dos años los niños ya dominan muchas cosas. Un niño de esta edad intenta despertar a su padre por la mañana:

—Papá, ¿estás dormido?

—No —responde el padre restregándose los ojos—, estoy en la cocina, tomando un té.

El niño se queda estupefacto. Las palabras de su padre contradicen todo lo que él sabe. Por si acaso, va corriendo a la cocina a comprobarlo y vuelve triunfante.

—No estás en la cocina. Estás aquí. ¡Aquí!

La próxima vez no le engañará tan fácilmente. Me gustaría insistir en ese momento de investigación independiente en el que el niño sale corriendo a la cocina para comprobar que su padre no está allí. De una forma intuitiva sé que esta iniciativa es una cualidad muy importante y me gustaría que los niños la conservaran todo el tiempo que fuera posible.

Contar en japonés

Tiempo después, al niño se le enseñarán matemáticas "de verdad". Como norma significa que tendrá que aprender a contar. Está claro que saber contar es importante, pero los adultos no siempre son conscientes de lo que está en juego.

¹² Pushkin, el gran poeta ruso, dijo una vez: "Seguir los pensamientos de un gran hombre es un pasatiempo realmente fascinante".

Intentemos ponernos en el lugar del niño y aprender a contar, pero en japonés. Los números del uno al diez son: *ichi, ni, san, shi, go, roku, shichi, hachi, kyu, ju*. La primera tarea consiste en aprender de memoria la secuencia. No es tan fácil. Una vez que lo hayamos conseguido, pasaremos a la segunda tarea, que consiste en aprender a contar hacia atrás, de *ju* a *ichi*. Una vez dominado esto también, intentaremos calcular. ¿Cuánto es *roku* más *san*? ¿*Shichi* menos *go*? ¿*Hachi* dividido entre *shi*? Y ahora una suma: mamá compró en el mercado *kyu* manzanas y les dio *ni* manzanas a cada uno de sus *shi* hijos. ¿Cuántas manzanas quedan? Solo hay una regla: no se te permite traducir las cantidades, ni siquiera mentalmente. Con un poco de práctica se vuelve algo natural. A veces ni siquiera nos damos cuenta.

No fui capaz de apreciar el enorme logro intelectual que supone para los niños aprender a contar hasta mucho después, cuando vine a vivir a Francia. Llevo más de quince años aquí, y los números todavía se me resisten. El francés tiene un peculiar sistema para designar los números entre 70 y 99. Después del sesenta y nueve dicen sesenta-diez (70), sesenta-once (71), sesenta-doce (72), etc. Después del sesenta-diecinueve aparecen cuatro-veintes (80), cuatro-veintes-uno (81), cuatro-veintes-dos (82), y después del cuatro-veintes-nueve (89) dicen cuatro-veintes-diez (90), cuatro-veintes-once (91), cuatro-veintes-doce (92) y así hasta cuatro-veintes-diecinueve (99). Solo entonces viene el cien. Cuando alguien me dice un poco rápido un número de teléfono o la fecha de nacimiento de alguien famoso, créeme, no me resulta nada fácil coger todos los números. Menos mal que no tengo que sumar y restar.

(Por cierto, este es el origen de la divertida respuesta, citada con frecuencia en la literatura sobre pedagogía, que dio un alumno de primaria francés a la pregunta: "¿Cuánto es veinte veces cuatro?". El chico respondió: "Cuatro-veintes, porque la multiplicación es conmutativa").

¿Eres ya capaz de contar hasta *ju*? ¿Cuánto tiempo has tardado? ¿Una semana? ¿Un mes? Ahora ya sabes que no es un problema de aprender de memoria sin más. De haber sido así, lo habrías dominado en una hora; pero, si no se trata de aprender de memoria, ¿entonces qué es? ¿Eres capaz de aislar a partir de tu experiencia problemas puramente matemáticos que estén siempre presentes a la hora de contar, pero de los que no nos percatamos habitualmente? No es tan fácil, ¿verdad?

De todas formas, quizá sea mejor así, porque, de lo contrario, los entusiastas de la educación temprana, en su impaciencia por que el niño avance, le habrían explicado algo que no está en condiciones de comprender y a lo que podría haber llegado por sí mismo.

Geometría de guardería

Además de a contar, otra cosa que se aprende pronto es la geometría básica. Tradicionalmente se cree que los niños deberían aprender (un poco) lo que son las figuras geométricas y las formas como los triángulos, los cuadrados, los círculos, etc., y a hacer mediciones sencillas. Pero pensemos un momento: si un niño es capaz de

diferenciar entre un tenedor y una cuchara con facilidad, ¿por qué habría de resultarle difícil diferenciar entre un cuadrado y un triángulo?

De hecho, no es nada difícil. Lo realmente complicado es aprender a establecer relaciones lógicas y cómo manipular las formas geométricas. Por ejemplo, muchos estudiantes de primaria creen que un cuadrado apoyado en un vértice ya no es un cuadrado, sino un cuadrilátero (figura 1). Por otra parte, comprender la pregunta “¿Cuáles son más abundantes, los cuadrados o los cuadriláteros?” requiere utilizar la lógica con habilidad.

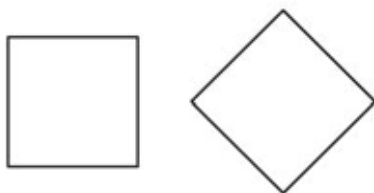


Figura 1. La figura de la izquierda es un cuadrado. ¿Y la de la derecha? Es muy habitual que los niños piensen que no: a sus ojos, un cuadrado apoyado en un vértice pierde la calidad de cuadrado y pasa a ser un cuadrilátero.

Desde este punto de vista, los cuadrados y los triángulos pierden enseguida su primacía: los acertijos en los que aparecen tenedores y cucharas no son menos matemáticos si nos proporcionan un motivo para pensar¹³. Por decirlo de otro modo, las matemáticas escolares trabajan con “números y formas” y así es como debería ser. Sin embargo, no podemos decir gran cosa de estos objetos a los niños. Esto en un principio podría significar que no podemos transmitirles una información matemática valiosa cuando lo cierto es que no es así. En realidad hay un montón de cosas interesantes que podemos enseñarles, pero tenemos que plantearnos cuidadosamente cuál es el enfoque más adecuado para ello.

¿Cuál es el planteamiento correcto? Bueno, cada uno tiene su propia opinión. A continuación hablo un poco sobre este asunto (exagerando a veces para que se vea con más claridad mi punto de vista).

Opiniones

- 1) *La sociedad tecnológica en la que vivimos actualmente requiere una mayor exposición de los niños a las matemáticas, incluso antes de comenzar la educación formal en la escuela.*

Qué aburrimiento. ¡Al cuerno con tanto requisito!

¹³ En el original en inglés se usa la expresión *food for thought*, lo que da lugar a un ingenioso juego de palabras al mencionarse la comida junto con la cuchara y el tenedor. (N. del T.).

- 2) *Es peligroso atiborrar los cerebros infantiles con cosas tan complicadas como todas esas integrales.*

Pero ¿quién ha hablado de integrales?

- 3) *¿Te lo imaginas?! ¡Hace que los niños estudien teoría de la probabilidad! ¡Los niños se enfrentan con toda facilidad a temas que muchos adultos con un nivel educativo superior no llegan a comprender! Siempre he dicho que no conocemos realmente el potencial de nuestro cerebro, sobre todo en los primeros años de vida.*

Querido observador entusiasta: me temo que te equivocas. No estudiamos teoría de la probabilidad, aunque sí es verdad que observamos ciertos fenómenos relacionados. (Es parecido a lo que haces cuando estás en la parada de autobús intentando adivinar cuál llegará primero).

- 4) *De pequeños, los niños normalmente tienen una memoria y una capacidad de aprendizaje excelentes. Además, realmente prestan atención a lo que dicen los adultos, por lo que habría que proporcionarles toda la información posible. Más tarde, cuando mejore su capacidad de pensamiento crítico y no quieran hacer cosas que para ellos no tienen sentido, tendríamos que darles más tiempo para la reflexión y añadir la motivación a su aprendizaje.*

Saqué esta opinión de internet. Pertenece a un profesor universitario, neurofisiólogo. Como no voy a revelar su nombre, permítame el lector expresar mi sincera opinión: esta chorrada ni siquiera merece respuesta.

- 5) *No veo por qué habríamos de atiborrar las cabecitas infantiles con tanta tontería. Dejadlos en paz. ¡Dejad que tengan una infancia normal!*

Este interlocutor plantea dos asuntos: las “tonterías” y la “infancia normal”. No voy a discutir sobre tonterías. Al fin y al cabo, todo es cuestión de gustos. Hice con los niños lo que me gusta hacer a mí personalmente y me parece que este aspecto de nuestras clases es muy importante.

Cuando mis artículos vieron la luz, me encontré inesperadamente jugando un papel totalmente ajeno a mi forma de ser: el de consejero. Recibí cartas de padres. En una de ellas, una madre escribía lo siguiente (de forma muy sentida): “Odio las matemáticas desde que era pequeña, pero sé que son muy importantes para el desarrollo intelectual de los niños. ¿Podría darme algunos consejos sobre cómo hacer actividades matemáticas con mi hijo?”.

Afortunadamente, en este caso sabía lo que tenía que responder. “Si las odia, no haga nada sobre matemáticas con su hijo. Haga con él solo aquello que a usted le guste hacer y será divertido para ambos. Por ejemplo, si le gusta la repostería, hagan pasteles juntos”. Lo único que me preocupaba era que se sintiera ofendida por mi respuesta; tal vez pensara que no la consideraba lo bastante inteligente.

En lo que sí discrepo es en lo de la “infancia normal”. Imaginemos la siguiente escena. Estamos sentados a la orilla de un río observando a una avispa hacer un agujero en la arena compacta. Cuando termina se aleja volando y al rato vuelve con comida suficiente para alimentar a su futura progenie, es decir, arañas paralizadas. Entonces pondrá los huevos dentro de sus presas y tapaná el hoyo. El famoso biólogo y etólogo Nikolaas Tinbergen demostró que las avispas se guían utilizando objetos como referencias. Pongamos un zapato a la derecha del nido y una concha a la izquierda, y cuando la avispa se marche, desplazemos ambos objetos a un metro del nido. Tinbergen descubrió que cuando la avispa regresa, un par de minutos más tarde, no aterriza junto al nido, sino a un metro de él, entre el zapato y la concha.

Hicimos el experimento y fue acogido con entusiasmo no solo por nuestros hijos, sino también por los demás niños que había en la playa. (Resulta interesante destacar que a ninguno se le ocurrió pisar a la avispa). ¿Se corresponde esta forma de divertirse con tu idea de una infancia normal? Para Tinbergen supuso el Premio Nobel, lo que podría llevar a nuestro entusiasta observador número 3 a decir alguna bobada pomposa sobre prodigios que llevan a cabo experimentos ganadores del Nobel.

Si algo inculqué a esos niños fue la idea de experimentar con todo abiertamente y con interés. Siempre recordaré las palabras de mi gran amigo Andrei Toom, extraordinario matemático y profesor. Las cito, no como un halago hacia mí, sino por la hermosa descripción que hace del ideal educativo al que todos debemos aspirar: “Lo que les enseñas no son matemáticas, sino una forma de vida”.

Breve historia de nuestro Círculo

La primera sesión de nuestro Círculo tuvo lugar de forma bastante casual el 23 de marzo de 1980. Las clases con los chicos se prolongaron durante cuatro años con bastante regularidad. Por aquel entonces, mi hija había crecido y creé un segundo Círculo con ella y sus amigos que duró dos años. Hubo algunos intentos de crear Círculos con otros niños, pero ninguno de ellos fructificó. Yo simultaneaba el desarrollo de aquella actividad con mi trabajo habitual (que no me llenaba en absoluto; ver página 32). De vez en cuando colaboraba dando clases magistrales en calidad de “maestro” visitante.

Sin embargo, en un determinado momento reuní el coraje suficiente y me puse a dar clases en colegios. Comencé dirigiendo un Círculo en el colegio de Dima. Tras varias experiencias similares más, hice algo alocado: me tiré de cabeza a la enseñanza a tiempo completo en un colegio de Moscú, donde puse a prueba un currículo experimental durante un mes. Antes de aquello me comportaba como un intelectual arrogante, siempre criticando a los profesores y a los centros escolares, y siempre dándoles sabios consejos. Sin embargo, aquel experimento en mis propias carnes me abrió los ojos. Vaya que lo hizo, pero estoy adelantando acontecimientos.

Un suceso importante para este relato tuvo lugar cuando una amiga de la familia, la conocida psicolingüista Revekka Frumkina (a cuyos congresos domésticos yo mismo había asistido¹⁴), tras leer mi diario, me llevó a las oficinas de la revista *Znanie-Sila* (*Saber es Poder*), que poco después publicó mis dos trabajos sobre el círculo (n.º 8, 1985, y n.º 2, 1986). Hubo un tercer trabajo que no tuvo la inesperada acogida de los dos primeros. Vadim Levin, extraordinario poeta y profesor infantil, llegó a decirme que para él eran clásicos de la literatura educativa. ¿Qué ocurrió con ellos? Pasado un tiempo, ambos trabajos aparecieron publicados en inglés en *The Journal of Mathematical Behavior* (n.º 2, 1992, y n.º 2, 1993). Después fueron publicados en cuatro sitios web diferentes, si no me equivoco. Luego los reimprimió la revista rusa *Educación Prescolar* (mayo y julio de 2000) comentados por Vadim Levin e incorporados a su libro *Lecciones para padres* (Moscú, Folio, 2001). Más recientemente, la editorial *September First* publicó un cuadernillo titulado *La educación en casa para niños* con el mismo texto. Desgraciadamente, el nombre de Levin no aparece en algunas de las publicaciones (especialmente en las digitales), de modo que parece que algunos halagos que me hace Levin los hubiera hecho yo mismo. Resulta complicado rectificar la situación.

Eran los primeros años de la perestroika¹⁵. Nuestro gran amigo Stepan Pachikov organizó un club de informática para niños en Moscú. Los ordenadores los donó el campeón mundial de ajedrez Gari Kaspárov. En aquella época (1986) probablemente fuera el único sitio en toda la Unión Soviética en el que los niños tenían acceso a ordenadores. Como era de esperar, me confiaron uno de los grupos de menor edad. Le siguieron campamentos informáticos de verano en Pereslavl'-Zaleski y otro de invierno en Zvenígorod. Se formó otro club de informática para niños, Zodiac. Me cuesta recordar todos los detalles. Estaba muy solicitado y todo el mundo me consideraba un experto en matemáticas a nivel de educación prescolar.

En un momento dado me incorporé al llamado Equipo Científico Temporal *Escuela-1*, predestinado a preparar una reforma de todo el sistema escolar. El director formal de este grupo era el académico Velikhov, pero su líder real era Alexei Semenov. Entre nuestras muchas actividades, redactamos el libro de texto *Algorithmica* (para alumnos de 12 a 15 años). Sus autores por orden alfabético (en ruso) son A. Z. Zvonkin, A. G. Kulakov, S. K. Lando, A. L. Semenov y A. K. Shen. Tras varias publicaciones mimeografiadas, la editorial Drofa publicó varias ediciones, la primera de ellas¹⁶ en 1986. Algunas de las primeras materias que enseñamos en nuestro Círculo presentaban una forma un poco más complicada que las del libro. Cuando me enteré de que el

¹⁴ Los “congresos domésticos” de la era soviética eran reuniones de intelectuales que se llevaban a cabo en la casa de alguno de los participantes. En ellas se hacía trabajo muy serio al margen del control de las autoridades.

¹⁵ El conjunto de reformas, emprendidas por Gorbachov, que llevaron con el tiempo a la disolución de la Unión Soviética.

¹⁶ La última edición salió a la luz en 2006: A. K. Zvonkin; S. K. Lando; A. L. Semenov: *Informatica, Algorithmica: Textbook for 6th-year students*. Moscú, Prosveshchenie (publisher); “Education”.

curso había sido elegido para alumnos de primer año de una universidad americana me hizo gracia.

* * *

La dirección de mi vida cambió de manera sorprendente en aquel momento, dio un giro relacionado con el Círculo, aunque de forma indirecta. En 1989 dejé mi trabajo en el Instituto de Investigación y Desarrollo para la Automatización de la Industria del Gas y el Petróleo de la Unión Soviética. Aquellos que vivieron el período soviético saben lo que eran esos lugares: institutos de investigación aplicada de tercera categoría, con guardias que controlaban la asistencia y misiones anuales a un *koljós*¹⁷ como parte del trabajo. Relaciones cordiales y positivas con otros colegas en la misma situación que tú realizando un trabajo aburrido e inútil (en la actualidad, las mismas personas llevan a cabo trabajos que sí merecen la pena, pero en otros lugares).

Yo odiaba aquel trabajo, pero no tenía posibilidad de encontrar otro. Entonces, de repente, fui a dar en el Consejo Científico de Cibernética de la Academia de las Ciencias de la URSS, formando parte de un equipo cuya función consistía en introducir la informática en el currículo escolar. Creo que nuestros resultados dejaban mucho que desear, pero en aquella época rebosábamos entusiasmo y estábamos tan emocionados con el trabajo que a veces llegábamos al límite del agotamiento físico. Dejando a un lado las fuerzas de la Historia, en lo que concierne a la historia de mi vida queda claro que, sin el Círculo, jamás habría conseguido aquel maravilloso trabajo.

Continué dedicándome a la investigación matemática. Me refiero a que continué investigando en el área de las matemáticas al tiempo que realizaba mis investigaciones en enseñanza, pero la dirección de mi trabajo cambió radicalmente. Contribuí a este cambio, entre otras cosas, el hecho de que en el campamento de informática en Pereslavl'-Zaleski del que he hablado antes coincidí con dos colegas tan entusiasmados como yo con mi nuevo objeto de interés en esta área: Sergei Lando y George Shabat. Comenzamos a trabajar juntos y nuestra colaboración sigue funcionando a fecha de hoy: nuestra monografía conjunta con Sergei Lando fue publicada en 2004 por Springer-Verlag y la traducción al ruso vio la luz en 2010.

En 1990 visité Francia por primera vez. De haber seguido en mi anterior trabajo habría sido inconcebible viajar al extranjero, pero en el Consejo de Cibernética la situación era totalmente distinta. Por aquella época yo aún no conocía a mis colegas en mi nuevo campo de investigación, así que aquel viaje me sirvió para orientarme. En Burdeos conocí a otras personas con intereses similares a los de mi trabajo. Fui a aquella ciudad una vez y repetí; después me invitaron a ir como profesor visitante durante un año. Al final, me quedé allí definitivamente como catedrático. Es curioso que el hecho de que yo ahora sea profesor en Burdeos se deba en gran medida al círculo matemático para niños que fundé hace años.

¹⁷ Granjas colectivas. Zvonkin se refiere a trabajo regular "voluntario" que era requerido por el Gobierno.

Agradecimientos

Mis lectores, como personas inteligentes que son, adivinarán enseguida a quién debo mi agradecimiento en primer lugar: a los niños. Cuando era joven, mis padres me daban mucho la tabarra con: “Cuando tengas hijos lo entenderás”. Aquello me ponía furioso. ¿Qué es eso tan especial que hay que entender? Hijos, vaya cosa. Todo el mundo los tiene, ¿y qué?

¿Cómo iba a saber yo por aquel entonces que tener hijos te hace ver el mundo de una manera totalmente distinta? Estoy seguro de que algunas personas, más imaginativas, son capaces de intuir esto. Tal vez para ellas, los cambios no sean tan extremos, pero en mi universo personal mis hijos fueron como un *big bang* y les doy las gracias.

Les estoy profundamente agradecido a todos los niños que participaron en nuestros círculos. Cuesta imaginar lo mucho que he aprendido de ellos. Sí me gustaría decirles algo: sinceramente, siempre traté de repartir mi atención por igual entre todos ellos y lo mejor que pude, aunque me temo que no siempre lo conseguí. Sin embargo, si alguno me guardara rencor por ello, lo único que puedo decirle es: “Cuando tengas hijos lo entenderás”.

Le estoy muy agradecido también a mi mujer, Alla Yarkho. En primer lugar por los hijos que tuvimos —sería difícil sobrestimar su parte del trabajo— y en segundo lugar porque fue a ella a quien se le ocurrió la idea del círculo. Resulta evidente que el programa es tan suyo como mío. Le estoy agradecido tanto por su apoyo moral como por su insistencia posterior en que debería preparar el diario para publicarlo. Ni que decir tiene que a lo largo de todos estos años ha hecho las veces de correctora de pruebas, editora, asesora y, por supuesto, lectora entusiasta.

Revekka Markovna Frumkina fue quien me “lanzó”. Gracias a ella, nuestra empresa familiar se hizo popular. Rita Markovna, como la conocen sus amigos, es la madrina de numerosos proyectos interesantes; entre ellos, este. Las conversaciones que tuvimos al respecto me ayudaron a aclararme las ideas.

Alexei Semenov no fue solo mi supervisor oficial en el Consejo de Cibernética, sino que también actuó como un “sabio consejero” (aunque sea más joven que yo). Su convicción de que mi trabajo merecía llegar a un público más amplio terminó por persuadirme.

Alexander Shen fue una de las primeras personas que leyeron mis cuadernos manuscritos y me instó reiteradamente a que los publicara. Al final, cansado de que lo postergara continuamente, reunió un equipo entre estudiantes de secundaria y universitarios para que mecanografiaran y pasaran a formato impreso la primera versión de este libro. Vladimir Lugovkin, en particular, hizo un grandísimo trabajo. Llegado a ese punto ya no tuve más remedio que editar el libro y, de nuevo, el indispensable Shen me ayudó instalando la versión rusa de LaTeX en mi ordenador francés, ahorrándome con ello años de trabajo.

La lista de agradecimientos dista mucho de acabarse. De hecho, ni siquiera he empezado como es debido, pero si sigo, seguro que el lector terminará por saltarse esta parte, así que seré breve. Les estoy profundamente agradecido a todos aquellos con quienes discutí sobre este libro, ya fuera largo y tendido o brevemente, y a los que me animaron con su interés. ¡Gracias a todos, amigos!

* * *

En Moscú, en la calleja Bolshoi Vlassievskii Lane, cerca de la calle Arbat, se encuentra el edificio que acoge a una muy destacable institución que ya se ha hecho tremendamente popular entre matemáticos de todo el mundo. Se trata del Centro para la Educación Matemática Continua de Moscú (MCCME)¹⁸. Lo de “continua” significa que es “para todas las edades”. Se compone de una editorial, la Universidad Independiente de Moscú y una escuela de posgrado. Además, se encarga de la organización de numerosas olimpiadas y competiciones matemáticas para estudiantes de secundaria, así que ¿por qué no incluir niños de preescolar? Me alegra y enorgullece que mi libro fuera publicado por el MCCME.

Además, en un lugar así, uno se topa por fuerza con viejos amigos. Uno de ellos, Vadim Bugaenko, fue el responsable de la edición del libro en sus fases iniciales, aunque no fuera su obligación directa. Su ayuda resultó nuevamente impagable con la segunda y tercera ediciones rusas, así como con la versión inglesa. Con frecuencia, los lectores suelen atribuir todo el mérito al autor sin darse cuenta de la complejidad y las múltiples facetas del proceso de publicación.

Le estoy muy agradecido a todo el equipo y, especialmente, a Mikhail Panov, quien, entre otras cosas, realizó todos los dibujos. (Los expertos sabrán apreciar su habilidad para dibujar imágenes reales con el programa METAPOST, concebido inicialmente como herramienta para dibujar imágenes gráficas para trabajos científicos).

Por, último aunque no por ello menos importante, quiero mencionar el extraordinario papel que han jugado mis colegas americanos Paul Zeitz y Silvio Levy, así como todo el departamento de publicaciones del MSRI. Les traslado también a ellos todo el agradecimiento dedicado anteriormente a mis ayudantes rusos. Finalmente, me gustaría mencionar el importante papel de la Sociedad Matemática Americana (American Mathematical Society, AMS) al poner en marcha la edición americana de este libro.

Descargo de responsabilidades

En primer lugar, no todos los problemas y acertijos que aparecen en el libro son creación mía. Proceden de diferentes fuentes, entre ellas libros de psicología y matemáticas recreativas, y también de amigos. Dejé algunos en su forma original y transformé otros, de forma sustancial en algunos casos, durante el transcurso de las se-

¹⁸ Consultar www.mccme.ru. La página está en ruso, pero hay una parte sustancial traducida al inglés.

siones. Algunas de mis fuentes se me olvidaron hace tiempo. Otras se perdieron cuando me fui a vivir a Francia. En el caso de algunos problemas ya ni siquiera recuerdo si los tomé prestados o son míos realmente. Para pagar esta deuda con el mundo, permito a todos que los usen y me comprometo a no denunciar a nadie por plagio. Antes bien, me alegrará saber (incluso me sentiré orgulloso de ello) que mis invenciones se incorporan a la tradición educativa.

En segundo lugar, mis historias no son relatos transcritos literalmente. Están escritas a partir de mis recuerdos y no siempre resulta fácil discernir lo que los niños dicen cuando hablan todos a la vez. Estoy seguro de que se me habrán pasado cosas y otras las habré interpretado mal; en cualquier caso, creo que esto es algo más o menos obvio.