Gardner para aficionados

Juegos de matemática recreativa

Coordinado por **Fernando Blasco**

biblioteca
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS

Real Sociedad Matemática Española

sm

Gardner para aficionados

Juegos de matemática recreativa

Coordinado por **Fernando Blasco**

biblioteca ESTÍMULOS **MATEMÁTICOS**

Real Sociedad Matemática Española

sm

Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz

Diseño: Dirección de Arte Corporativa de SM

Edición: Fernando Barbero

Corrección: Ricardo Ramírez

Ilustración: Jacinto Rodríguez Montoro

Fotografía: Montse Fontich / Archivo Sm; Mercedes Sánchez Benito; Antonio Pérez Sanz; Josep Lluís Pol i Llompart; Juan M.R. Parrondo; Natalia de Lucas Alonso; Marco Castrillón; Nelo Alberto Maestre Blanco; Bartolo Luque; David Martín de Diego; Marta Macho Stadler; Harvest Records; M.C. Escher´s Print Gallery © 2017 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com; Lisa Norwood / Wikipedia; 123RF; Shutterstock; iStock; Album; Fernando Blasco; Luis Hernández Corbato; Archivo SM.

Revisión científica: Fernando Barbero, Luis Hernández Corbato y Fernando Blasco

Editor General de la Real Sociedad Matemática Española: Alberto Ibort

Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección: Luis Hernández Corbato

ISBN: 978-84-675-8289-5

Depósito legal: M-17490-2015

Impreso en España / *Printed in Spain*

Índice

Presentación

Pensemos en una vaca. Una vaca no tiene la misma destreza en resolución de problemas que un chimpancé, que ha descubierto cómo puede sacar termitas del suelo metiendo un palo en un agujero. La evolución ha desarrollado la capacidad cerebral para resolver rompecabezas, y al mismo tiempo ha producido en nuestro cerebro el placer de resolver problemas.

Martin Gardner

Cuando hace unos años pedimos a algunos compañeros participar en un libro dedicado a Martin Gardner, ninguno declinó la invitación. Los que nos dedicamos a la matemática recreativa nos hemos iniciado con sus escritos y aún hoy seguimos bebiendo de esa fuente que es Gardner. Decidimos, en su día, hacer dos volúmenes con las contribuciones recibidas y en tus manos tienes el segundo: *Gardner para aficionados.* El anterior, *Gardner para principiantes*, publicado en 2014 en esta misma colección coincidiendo con el centenario del homenajeado, se está convirtiendo en un referente.

Este volumen se ha compuesto con la misma ilusión, queriendo continuar ese trabajo bien hecho. Ni el título de estos volúmenes está elegido al azar, ni tampoco los contenidos que encontraremos en ellos. Gardner, periodista de profesión pero científico de afición, alternaba columnas sencillas con otras de mayor complejidad en su sección de “Juegos matemáticos” en *Scientific American*. Nosotros hemos querido emularle, dejando para este libro no los artículos con mayor dificultad matemática sino aquellos que se iban a comprender mejor tras conocer de antemano a Martin Gardner.

En esta ocasión no voy a presentar a Gardner y su obra, puesto que ya está hecho en el volumen anterior. Sin embargo, creo que es justo dar a conocer a los catorce autores que, desinteresada y entusiastamente, participan en este libro. Todos ellos son grandes divulgadores, y podemos aprender mucho de ellos.

Recordemos, para los nuevos lectores, que Gardner era capaz de aunar las humanidades y las matemáticas y eso lo encontramos también aquí: el primer capítulo está escrito por una persona que ha batido todos los récords en cuanto a la divulgación de las matemáticas en nuestra lengua. Adrián Paenza es, como Gardner, periodista, pero es además doctor en Matemática. En su biografía se indica que es autor de más de una docena de libros, lo que no se dice es que, por expreso deseo de Adrián, con el fin de conseguir que la matemática llegue a todas partes, sus obras siempre están disponibles en abierto en su página web.

Mientras Luis Hernández, actual director de esta colección de Estímulos Matemáticos, y yo, estábamos trabajando en la edición de este libro, coincidió que Adrián Paenza estaba de paso por Madrid y pudimos pasar una mañana con él. Lo cierto es que fue totalmente inspirador y entusiasta. Esperamos que también el lector tenga una sensación similar tras leer el primer capítulo de este libro.

Hablamos de matemáticas, de comunicación, de la relación entre ciencias y humanidades, de Martin Gardner, de problemas, de fútbol y de baloncesto. En definitiva, hablamos de la vida, igual que hacía Martin. Y, en una de esas conversaciones, apareció un nombre: el de Eduardo Sáenz de Cabezón. Adrián nos dijo que le había encantado su forma de actuar y de transmitir las ideas matemáticas. Luis y yo le dijimos que también era uno de los autores que participan en este libro.

Eduardo aúna asimismo la matemática con el arte, en su caso concreto con el guion y la interpretación a través de monólogos científicos, aunque su labor divulgativa no se reduce a eso: es además autor de libros, *youtuber*, ponente en numerosos congresos, participa en televisión y radio y es capaz de llegar a muchos tipos de públicos distintos. Estoy seguro de que Martin y Eduardo, en el caso de haberse llegado a encontrar, habrían tenido conversaciones muy interesantes, tanto de lo divino como de lo humano.

Puede que el resto de autores no sean tan conocidos para el gran público hoy como Adrián y Eduardo, pero todos realizan una encomiable labor divulgativa que, a veces, pasa desapercibida. Mercedes Sánchez es una de las personas “que siempre han estado ahí”. Nunca se lo he preguntado, pero puede que tuviera que ver incluso con mi primer contacto con Gardner, a través de *Carnaval matemático*, puesto que me lo regalaron en un concurso de resolución de problemas y ella colabora en esa importante labor desde hace muchos años.

El fomento de las vocaciones matemáticas es el sustrato sobre el que se cimenta la divulgación de esta ciencia: Marco Castrillón, Nelo Maestre, Vicente Muñoz y Luis Hernández han sido “olímpicos” y ahora se dedican profesionalmente a las matemáticas. Marco, Vicente y Luis son investigadores punteros pero, entre teorema y teorema, dedican mucho tiempo a la difusión de las matemáticas, mientras que Nelo ha creado su propia empresa de divulgación. A veces escribiendo, a veces dando conferencias y en ocasiones enseñando: todos ellos han participado en el proyecto ESTALMAT de estímulo del talento matemático (que es uno de los objetivos de esta colección de libros de la Real Sociedad Matemática Española [RSME]). Con Marco y Nelo (y Ángeles Prieto) cada año organizamos el *Martin Gardner Celebration of Mind* de Madrid, y Vicente fue ponente en la primera edición.

Al igual que Merche, Antonio Pérez es otra de las personas que han divulgado las matemáticas “desde siempre”, al menos desde mi punto de vista. En cierto modo puede considerarse un “Martin Gardner” español. Muchos leíamos a Gardner pero veíamos a Antonio en televisión. Ahora hay mucha telebasura, pero antes tampoco era fácil acceder a ese medio, de ahí su mérito. La televisión no es el único formato en el que ha trabajado: también ha escrito libros para públicos de diferentes edades y ha dirigido colecciones de obras de divulgación.

Pep Lluís Pol y Natalia de Lucas son dos profesores que, cada uno en su ciudad de referencia, organizan multitud de eventos divulgativos. Ninguno de ellos para. Uno de los más polémicos escritos de Martin Gardner es en el que describe el libro *Ars Combinatoria* de Ramon Llull, en el que Gardner critica bastante al erudito mallorquín. Si hubiera conocido las actividades de divulgación matemática que realizan en la isla habría tenido un punto de vista muy sorprendente.

El artículo que se presenta en este libro tiene que ver con dominós y fracciones, pero aconsejo a los lectores que visiten Palma cerca del solsticio de invierno. Allí podrán ver un efecto matemático-astronómico en la catedral. Y, como muchas cosas, se ha descubierto por casualidad. Parece obvio que se hizo con intención por el arquitecto, pero hasta hace unos años se había olvidado. Estoy seguro de que Gardner, de haberlo conocido, habría escrito sobre ello. En otro orden de cosas, la papiroflexia es el origen de la colaboración de Gardner con *Scientific American* y un tema recurrente en sus escritos. Natalia ha realizado exposiciones de papiroflexia en bibliotecas y centros culturales y siempre que puede lleva las matemáticas a contextos en los que no son habituales.

Juan M. R. Parrondo escribió la columna de “Juegos matemáticos” para *Investigación y Ciencia*, tarea que ahora lleva a cabo Bartolo Luque. Ellos han continuado la labor que empezó Gardner hace ahora 60 años. Y han conseguido que esa columna de divulgación matemática sea un referente en la revista. Un conocido libro de Martin Gardner es *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar.* No aparece la “paradoja de Parrondo” porque es posterior al libro, pero en cualquier caso resulta sorprendente conocer a alguien que da nombre a un hecho muy citado en la literatura científica: cómo la combinación de dos juegos perdedores da como resultado un juego ganador.

Bartolo es un prolífico autor que escribe tanto divulgación como artículos de investigación en prestigiosas revistas. Se pueden decir muchas cosas de él, pero quizá lo que más le define como *gardneriano* es un consejo que me dio: “De todo el trabajo, procura hacer el que te proporcione placer”. Y preparar este libro con este elenco de autores me lo ha proporcionado.

En marzo de 1981 la portada de *Scientific American* estuvo dedicada al cubo de Rubik. En ese momento tenía dos añitos Carlos Angosto, que después ha sido campeón de España en la resolución de ese rompecabezas que trae de cabeza a muchos pero levanta las pasiones de otros. Podría utilizarse como símil de lo que ocurre con las matemáticas: imposibles para algunos, pero apasionantes para los que las descubren verdaderamente. El artículo que nos presenta aquí no tiene que ver con esa especialidad, pero da muestra de su afición por la resolución de puzles, problemas y acertijos.

Solo queda referirme a dos personas, incansables investigadores y divulgadores. Marta Macho es capaz de venir corriendo a dar una charla a Madrid sobre Martin Gardner y levantarse a las cinco de la mañana para llegar a tiempo a Bilbao a dar clase. No tengo muy claro cuál es la definición de *cultura* (lo acabo de buscar y he encontrado “excelencia en el gusto por las bellas artes y las humanidades”) pero tengo claro que, si me piden que piense en una persona culta, me viene a la cabeza Marta. Es buena matemática, topóloga, pero sabe de muchísimas otras cosas: música, literatura, arte, etc. Además es una gran defensora de causas sociales y, en concreto, reivindica el papel que desempeñan las mujeres en la ciencia y que muchas veces ha estado olvidado. No sé cómo consigue estirar los días para que le cundan tanto, me da muchísima envidia. También es muy similar a Gardner y tenemos mucho que aprender de ella.

David Martín es investigador del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) y en este momento es subdirector del Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) y vicepresidente de la RSME. A pesar de su labor de investigación y de gestión, encuentra siempre un lugar para la divulgación y la cultura científica; a veces como protagonista y otras desde un segundo plano, es responsable de muchas actividades de divulgación. Pero si todo ese currículum no es suficiente, hay otra cosa que tengo que decir: ambos somos del mismo pueblo.

Ya hemos presentado a todos los actores de esta obra, menos a uno, el más importante. Pero ese no necesita presentación. Tú, lector, ya te conoces. Y, sí, eres un actor en esta obra porque no tienes que ser un lector pasivo. Esperamos que disfrutes con los juegos y pasatiempos que se proponen aquí. Y que si encuentras errores o sugerencias de mejora nos lo comuniques, del mismo modo que hacían los lectores de Martin Gardner. Y, sobre todo, que dentro de algunos años sigas disfrutando con la obra de Gardner y tú contribuyas a crear juegos y pasatiempos similares a los suyos.

Fernando Blasco,

Profesor de Matemática Aplicada en la Universidad Politécnica de Madrid.

Capítulo 1

Una vuelta de tuerca a problemas de Martin Gardner

Adrián Paenza

Martin Gardner nació y murió en Estados Unidos, en el estado de Oklahoma, en Tulsa y Norman, respectivamente, y vivió 96 años (desde octubre de 1914 hasta mayo de 2010). Fue el más prolífico y brillante escritor y difusor de la matemática recreativa en el mundo. Es considerado como el verdadero 'gurú' de la especialidad. Las columnas que escribió durante 25 años en la revista *Scientific American* ("Mathematical Games", o sea, "Juegos matemáticos") han sido inspiradoras de todos los que de una u otra forma hemos intentado seguir por el camino que él abrió, los surcos que él creó y que nosotros solo tratamos de mantener vivos y activos. Puede que en el futuro aparezca alguien como él (¿por qué no?), pero ciertamente, la historia mundial muestra que, hasta aquí, hay uno solo que ha logrado respirar el oxígeno que hay en las alturas a las que él llegó: ¡él y nadie más!

Creo que la mejor manera de recordarlo es a través de historias que hubiera escrito el propio Gardner, o que si bien no son de su autoría, debieron o pudieron serlas. Sería algo así como un equivalente de lo que significa el libro *Proofs from THE BOOK*[1].

Aspiro a que los problemas que siguen apunten en esa dirección y, sobre todo, que sirvan para que usted... sí, *usted,* pueda entretenerse y disfrutar *pensando...*

Mi gratitud eterna para los editores de esta antología, quienes han tenido la generosidad de invitarme a participar. Acá voy.

La mujer, el marido, el tren y la estación

El siguiente problema fue seleccionado por Martin Gardner como uno de los que más le gustó por su sencillez y profundidad. Lo descubrí leyendo alguno de sus textos en una pequeña librería en Nueva York, en el Village. No sé si aún existe la librería, pero sí sé que los libros no estaban agrupados ni por autores ni por temas, sino por el título, idea original pero que hacía muy complicado encontrar lo que uno buscaba..., claro,

---

1 *Proofs from THE BOOK* [1], es un libro editado por Martin Aigner y Günter M. Ziegler, sobre las pruebas más bonitas, sencillas, elegantes y austeras que se conocen de algunos teoremas matemáticos. Está dedicado a la memoria del matemático húngaro Paul Erdős, quien llamaba *The Book* al libro en que, según él, Dios guarda la demostración más elegante de cada teorema. Está traducido al español con el título *El libro de las demostraciones*, Editorial Nivola, 2005.

siempre y cuando uno buscara algo. Sin embargo, en el camino, ofrecía a quien es un lector tan tendencioso en su búsqueda (yo) un panorama sobre la literatura general con el que nunca me tropezaría si no fuera *forzado* a hacerlo. Es por eso que quiero enfatizar que, en todo caso, yo no buscaba encontrarme con este texto que quiero compartir acá.

Me permito hacerle una sugerencia: después de leer el problema –y eventualmente resolverlo– seguramente le surgirán múltiples reflexiones, pero una de las más importantes debería ser la siguiente: ¿cuántas veces en la vida cotidiana creemos estar ante un problema que, o bien no tiene solución, o bien creemos que nos faltan datos para resolverlo?

Bien. Este es un magnífico ejemplo para poner a prueba no el ingenio, cuya definición me resulta muy resbaladiza, sino la capacidad para poder pensar desde otro lugar.

Un comerciante viaja a su trabajo todos los días usando el mismo tren, que sale de la misma estación y que tiene los mismos horarios, tanto de ida como de vuelta.

Para colaborar con él, su mujer lo lleva a la mañana hasta la terminal y luego lo pasa a buscar a las cinco de la tarde con su coche, con el fin de ahorrarle viajes en bus. Me interesa enfatizar este hecho: *todos los días* la mujer lo pasa a buscar a la misma hora (las *cinco* de la tarde) y juntos comparten el viaje en coche hasta la casa en la que viven.

Un día, el marido termina su trabajo más temprano y toma un tren que llega una hora antes de lo acostumbrado. Es decir, lo deja en la estación acostumbrada a las cuatro de la tarde (en lugar de las cinco como es habitual). Como el día está muy lindo, en lugar de llamar a la mujer para contarle lo que hizo, decide empezar a caminar por la calle que ella utiliza habitualmente para ir a buscarlo.

Tal y como él lo había previsto, se encuentran en el trayecto. El marido se sube al coche y juntos vuelven a su domicilio, al que llegan **diez minutos** antes de lo habitual.

Si uno supone la situación ideal (e irreal también), de que:

a. La mujer hace todo el trayecto, todos los días, a la misma velocidad constante.

b. Sale siempre a la misma hora de la casa para ir a buscar a su compañero.

c. El hombre se sube al coche en forma instantánea y sin perder ningún tiempo.

d. Nunca aparece nada extraño en el camino, ni semáforos que dilaten o aceleran el tránsito, etc.

Nada cambia con el día. Las condiciones se reproducen *mágicamente* viaje tras viaje. Ahora, la pregunta:

¿Puede usted determinar cuánto tiempo debió caminar el marido hasta el momento que se encuentra con su mujer y se sube al coche?

Un par de reflexiones antes de escribir la solución. Como se da cuenta, el problema en sí mismo es muy sencillo. La belleza consiste en que no hay que utilizar ninguna herramienta sofisticada, ni ningún recurso extraordinario. Solo hay que pensar y, para eso, usted decide cuándo y cómo lo hace. Lo **único** que le pido es que me crea que vale la pena.

Algo más: me gustaría aportarle algunas respuestas intermedias que –quizá– necesite. Si usted cree que le hace falta saber:

a. La velocidad a la que caminaba el marido.

b. La velocidad a la que viajaba el coche que conducía la mujer.

c. La distancia entre el domicilio y la estación.

Bueno... *créame* que no son necesarios. De hecho, los datos que tiene arriba son suficientes para encontrar la respuesta.

Solución

Se sabe que la mujer y el marido llegaron a la casa *diez minutos* antes que de costumbre. Esto significa que la mujer viajó diez minutos menos en el coche o, lo que es lo mismo, cinco minutos menos en el viaje de ida y cinco minutos menos en el viaje de vuelta.

Ahora, podemos deducir lo siguiente:

El marido caminó 55 minutos desde la estación hasta el lugar en donde encontró a la mujer.

¿Por qué? ¿No tiene ganas de seguir usted por su cuenta?

Sigo yo. Es que la mujer siempre pasa a buscar al marido a las cinco de la tarde. Como ese día en particular condujo el coche cinco minutos menos de lo habitual, cuando lo encontró eran las 16:55 de la tarde.

De esta forma, al dar la vuelta en ese momento, como también conducirá cinco minutos menos al volver, llegarán diez minutos antes de lo habitual, tal y como indicaba el enunciado.

Conclusión: El señor caminó 55 minutos.

Como se ve, una vez conocida la solución, el problema en sí mismo es muy fácil. Más aún: creo que si uno tuviera la solución sin haber dedicado ningún tiempo a pensarlo, decidiría que es *demasiado fácil.* Pero esto suele suceder con muchas situaciones de la vida cotidiana: cuando uno ha abordado un problema desde un lugar equivocado o quiere forzar mentalmente a que pasen ciertas 'cosas' que 'no pasan', es entonces cuando uno sospecha que 'faltan datos' y se desespera.

Este ejemplo es singular en ese sentido: permite advertir como la matemática ofrece herramientas de pensamiento y deducción que tienen una potencia maravillosa.

Pimpón

El siguiente problema lo conocí a través de dos *excelentes* matemáticos, ambos profesores en la Universidad de Barcelona. Uno es argentino (Carlos D'Andrea) y el otro es español (Juan Carlos Naranjo). Carlos, además de colega, es amigo personal y le debo a él *muchísimas cosas* que sucedieron en mi vida, profesional y privada. Su pasión por la matemática no se reduce al claustro, sino que es un referente mundial en múltiples competencias internacionales de matemática, tanto en Europa como en Suramérica. Y Juan Carlos es vicedecano de la Facultat de Matemàtiques en la Universitat de Barcelona, y tiene múltiples premios y reconocimientos mundiales. Nació en La Rioja (España) pero se crió en Cataluña, región por la que yo tengo un particular afecto.

Fue D'Andrea quien me sorprendió un día con un correo electrónico a las 2 de la mañana, hora de Chicago, con el problema que figura más abajo y que a mí me pareció *espectacular.* Sea usted juez de lo que sigue.

Suponga que tres amigos (A, B y C) se encuentran a jugar al pimpón un sábado por la tarde. No se preocupe: no hace falta saber nada del juego propiamente dicho, solo que en este caso se juega en forma individual: un rival de cada lado de la mesa.

Como tienen toda la tarde disponible, deciden jugar tantos partidos como puedan. La única regla que siguen es esta: eligen por sorteo quiénes jugarán el primer partido y, en lo que sigue, el ganador continúa jugando y el perdedor sale para que participe el tercero que estaba como observador.

Dicho esto, al finalizar la tarde deciden contar cuántos partidos jugó cada uno y la cuenta es la siguiente:

- A jugó 15 partidos.
- B jugó 10 partidos.
- C jugó 17 partidos.

(Fíjese en que el resumen es sobre partidos *jugados* y no partidos *ganados* o *perdidos*).

Pregunta: ¿Quién perdió el **segundo** partido?

Parece mentira, ¿no es así? Parece extraño que uno pueda encontrar respuesta a esta pregunta. Bueno, de eso se trata el desafío. Ahora le toca a usted.

Solución

Como escribí más arriba, el problema se me antojó fascinante porque la pregunta parece *totalmente descabellada.* Uno tiene ganas de decir (al menos eso fue lo que me pasó a mí): "¿Qué dijo? ¿Qué me preguntó?".

Sin embargo, como verá inmediatamente, la cadena de razonamientos que llevan a la solución es maravillosa.

Primero, contemos cuántos partidos se jugaron en *total,* al terminar la tarde. Si sumamos los partidos que jugaron los *tres* participantes, llegamos a 42, pero usted advierte que uno está contando *dos* veces cada partido (ya que lo juegan dos participantes por vez). Luego el número *total* de partidos jugados fue de 21.

Acá es donde me permito introducir un dato muy importante: cada jugador no puede esperar más de *un* partido sin jugar. ¿Por qué? Porque el que pierde, sale y espera que le toque su turno nuevamente, pero a lo sumo, tendrá que ser observador una sola vez antes de que intervenga nuevamente. En el mejor de los casos, uno de los jugadores podría ganar siempre y no ser observador nunca, pero los perdedores tienen la tranquilidad de que, en el peor de los casos, jugarán uno de cada dos partidos consecutivos.

Una pausa (que viene con pregunta incluida): después de haber leído lo que escribí en este último párrafo, ¿no tiene ganas de seguir por su cuenta? Ahora ya sabe que en total se jugaron 21 partidos y que los tres jugadores intervienen seguro en dos partidos consecutivos. Con estas observaciones sobre la mesa, quizá usted pueda avanzar en soledad...

Sigo yo. Pregunta: *¿cuál es el* ***mínimo número*** *de partidos que pudo haber jugado cada uno de los tres?*

Como en total se jugaron 21, y cada participante *tiene* que jugar por lo menos una vez cada dos partidos consecutivos, la *única* forma de jugar el *número mínimo* es que *pierda* todos los partidos en los que intervenga. Pueden pasar dos cosas:

a. Que quien juegue la cantidad mínima de partidos sea uno de los dos que inicia los partidos...

b. O que quien juegue la menor cantidad de partidos sea *observador* de ese primer partido.

Como en total jugaron 21 partidos, que es un número impar, haber participado en el primero o no marca una diferencia. Fíjese por qué.

En el caso **a,** si empezara jugando el primer partido, la sucesión sería la siguiente:

1-3-5-7-9-11-13-15-17-19-21

Como usted advierte, solamente jugaría los partidos impares: juega, pierde, sale, espera un turno y vuelve, pierde otra vez, sale y espera..., y así siguiendo.

Si usted cuenta, verá que en total jugó once partidos. Eso sucedió si uno supone que ese participante jugó el partido inicial de la serie. ¿Será ese el *mínimo*? ¿O podría haber alguna otra distribución en donde alguno de los jugadores haya jugado *menos* que once?

Analicemos el caso **b.** Igual que antes, para jugar la *mínima cantidad de partidos,* tendrá que inexorablemente *perder* todos los partidos que juegue, solamente que ahora, en lugar de jugar el primero, juega el segundo, y a partir de allí, juega, pierde, sale, espera un partido, entra, pierde y sale..., y así sigue [tal y como sucedía en el caso *a.*]. Pero la diferencia es que, ahora, ese jugador tuvo que haber participado en esta sucesión –que incluye *solamente* a los números pares–:

2-4-6-8-10-12-14-16-18-20

Y ahora sí que hemos llegado al número *mínimo* de partidos: **¡diez!**

En el camino, con este análisis encontramos la respuesta. Si usted se fija, verá que el participante B es quien advirtió que había *jugado* nada más que diez partidos y eso significa que B jugó el número *mínimo* de partidos posibles.

La *única* manera de que eso haya sucedido es que B haya jugado (y perdido) el segundo. Más aún: no solo tuvo que haber perdido el segundo, sino que B perdió *todos los partidos pares.*

Moraleja

Aunque no parezca, esto *también* es **hacer matemática.** Aprovechando su potencia, hemos podido dar respuesta a algo que parecía inabordable e inalcanzable. Espero que usted lo haya disfrutado tanto como yo.

El ancho del río

Por último, quiero escribir uno de los problemas más bonitos que pensé, o mejor dicho, que me hizo pensar Gardner. Sé que hay varias versiones y también varias soluciones y es por eso que le propondría que –si puede– no lea la respuesta, no deje que yo le conduzca por un camino que usted no encontró por su cuenta. Más aún: téngalo en la cabeza tanto tiempo como sea capaz, no se entregue; es un problema precioso.

A esta altura, me siento –casi– como una persona que está trabajando en una tienda tratando de vender televisores o heladeras, y usted es un potencial 'cliente' a quien yo pretendo seducir contándole las *bondades* del producto. Créame: ¡no es así! Confíe en que, si yo escribo que un problema me gustó mucho, es –justamente– porque me gustó *mucho,* pero sea usted juez..., nuevamente.

Un río separa dos ciudades. Dos barcos lo recorren en direcciones opuestas a *velocidad constante*, no necesariamente la misma, pero mantienen la misma velocidad a lo largo del trayecto.

Más aún: cuando un barco llega del otro lado, da vuelta inmediatamente sin detenerse y vuelve hacia el lugar de origen. Repiten este proceso una y otra vez.

Los dos barcos salen al mismo tiempo. Se encuentran por *primera vez* en el camino a 7 kilómetros de una de las costas y continúan su trayecto. Cuando cada uno llega al otro lado, *da* la vuelta inmediatamente (en forma ideal, claro está).

Los dos barcos vuelven a encontrarse en una segunda ocasión, esta vez a 4 kilómetros de la costa opuesta. Pregunta: con estos datos *¿Cuál es el ancho del río?*

Yo me aparto y le espero acá abajo. De esa forma, no estorbo ni obstruyo su línea de pensamiento.

Solución

No sé cómo le habrá ido a usted, pero a mí el problema me entretuvo mucho tiempo. Ocupó varios ratos de mis días hasta que encontré una solución: trabajosa, intrincada, técnica y con un poco de *física* en el camino. Sería un caso típico de solución que **nunca** estaría incluida en el libro [1] al que hice referencia más arriba (*Proofs from THE BOOK*).

Pensé: "Tiene que haber una respuesta mejor. Gardner no pudo haber dicho que este problema le fascinó si **esta** (o una equivalente) es la única forma de contestar a la pregunta".

Fui hasta el libro de él y leí *su* solución: me pareció sencillamente *extraordinaria* y es por eso que la elegí y la quiero compartir acá con usted. Acá va.

Fíjese en la Figura 1.1, en donde aparecen los dos barcos en cada una de las costas. Los voy a llamar A y B.

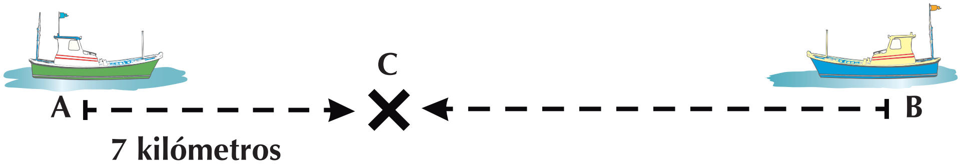

Figura 1.1. *Los barcos se cruzan por primera vez.*

Cuando se encuentran por primera vez en el punto C, lo hacen a 7 kilómetros de una de las costas, digamos la izquierda, desde donde salió A.

Preste atención a que A y B están en el mismo lugar (en C), cuando A ya recorrió 7 kilómetros desde que empezó su viaje. Se cruzan, pero siguen su marcha. En algún momento (no necesariamente el mismo), A llegará a la costa derecha, y B a la izquierda. Cuando cada uno llega a la otra orilla, da la vuelta sin perder tiempo y sale en dirección contraria.

Y ahora sabemos que, cuando se encuentran otra vez, lo hacen en un punto D que está a 4 kilómetros pero de la costa derecha (Figura 1.2).

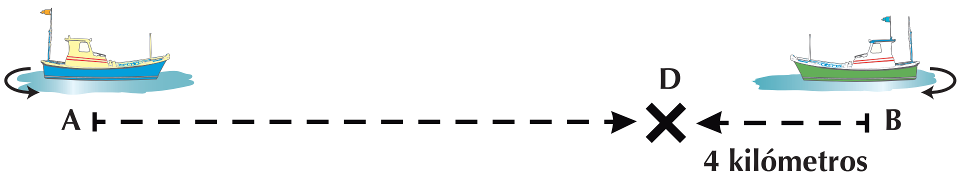

Figura 1.2. *Segundo cruce de los barcos.*

Ahora, quiero hacer una observación muy importante y conducente hacia la solución del problema: cuando los barcos se encontraron la primera vez, **entre los dos** recorrieron el ancho del río. Todavía no sabemos cuánto mide *este ancho*, pero sí que la suma de los dos tramos que navegaron **entre ambos** resulta ser el ancho total del río (que es el dato que estamos buscando).

Por otro lado, cuando los dos hayan tocado la costa contraria, habrán recorrido el ancho del río *dos* veces: una vez A y otra vez B. El barco A lo recorrió de izquierda a derecha y el barco B en la otra dirección.

Y, por último, piense lo siguiente: al tocar la costa contraria, dan la vuelta y se encuentran nuevamente en D, que está a 4 kilómetros del lado derecho del río. En ese momento, **entre los dos** recorrieron el ancho del río una tercera vez: lo habían navegado dos veces cuando cada uno llegó del otro lado, y ahora tenemos que sumar las distancias recorridas por los dos cuando se encuentran en D.

Conclusión (provisoria): al encontrarse en D, si uno suma las distancias que recorrieron los dos, el resultado es que navegaron tres veces el ancho del río.

Este es un dato no menor que invito a que usted revea/piense. Más aún: le propongo que no siga leyendo si cree que *no* entendió. Vuelva atrás tantas veces como le haga falta y, obviamente, piense si está de acuerdo con lo que escribí más arriba, y hasta que no se convenza, le sugeriría que no siga avanzando con el texto.

Ahora estamos de acuerdo en que, al llegar a D, entre los dos barcos recorrieron *tres* veces el ancho del río (sumados los tramos que hizo cada uno).

Quiero enfatizar otra vez dos hechos importantes:

a. Cuando se encuentran la primera vez, el barco A había recorrido *siete kilómetros.*

b. Además, en el momento del primer encuentro, entre los dos habían recorrido el ancho del río **una vez**.

Una conclusión importante entonces, es que **cada vez** *que* **entre los dos** *recorren el ancho del río* (no solo la primera vez, sino *siempre),* el barco A recorre *siete kilómetros.* Esto sucede porque los barcos mantienen una velocidad constante en el periplo que los lleva incesantemente de una costa a la otra.

Ahora estamos a un paso de encontrar la respuesta. Si estuviera junto a usted, le diría: *"Piense que al llegar a D, entre los dos barcos habían recorrido el ancho del río tres veces".*

¿Qué le sugiere esto? (¿quiere pensar la respuesta en soledad?).

Sigo: el barco A, al llegar a D, tuvo que haber navegado 21 kilómetros (siete kilómetros por cada vez que entre los dos completan el ancho, y al llegar a D, lo recorrieron tres veces).

Por otro lado, cuando se encontró con B por segunda vez, estaba a *cuatro* kilómetros de la otra costa, ya que había llegado hasta allí y dio la vuelta.

Luego eso significa que el barco A hizo *cuatro kilómetros más* que el ancho del río, y por tanto, en lugar de 21 kilómetros, el río mide cuatro kilómetros **menos**: ¡17 kilómetros! ¡Listo!

Esta es la respuesta que buscábamos. Creo que estará de acuerdo en que es una solución verdaderamente espectacular, una de las más bonitas que ofreció Gardner y creo que eso es *mucho* decir. Claro que en esto va involucrado mi propio gusto, pero no puedo evitar que se 'filtre' en lo que escribo.

Es por eso, por la capacidad para ofrecer una visión totalmente diferente, tan pulcra, tan elegante pero austera, que me permití seleccionarla para este volumen.

Final

Espero que usted haya disfrutado al leer estos tres episodios tanto como yo al escribirlos. La máxima aspiración que poseemos todos los que tenemos el privilegio de comunicar ideas: conmover, atrapar, seducir... Quizá sea mucho, pero es lo que me pasa.

Si llegó hasta acá, gracias por haberme acompañado.

Lecturas recomendadas, y más…

[1] Aigner, M. y Ziegler, G.: *Proofs from THE BOOK*. Springer, 1988.

[2] Gardner, M.: *My best mathematical and logic puzzles*. Dover, 1994.

[3] Paenza, A.: *Matemática… ¿estás ahí?* Colección "Ciencia que ladra…", Siglo Veintiuno Editores, 2006. Disponible en http://cms.dm.uba.ar/material/paenza)[2].

[4] Paenza, A.: *Matemática para todos*. Debate, 2017.

[2] Los libros del autor Adrián Paenza están disponibles en su página web. Sus siete últimos títulos aparecieron en todos los países de habla hispana y han sido publicados o impresos por el grupo editorial Random House.