# Déjame contarte

## Algunas historias sobre matématicas

Günter M. Ziegler

biblioteca
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS

Real Sociedad Matemática Española

sm

*Darf ich Zahlen?: Geschichten aus der Mathematik,* de Gunter Ziegler © 2010 by Piper Verlag GmbH, Müchen.

Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz

Diseño: Dirección de Arte Corporativa de SM

Traducción: David Garcés Urzainqui

Corrección: Juana Jurado

Edición: Fernando Barbero

Fotografía: Sven Paustian



Revisión científica: Fernando Barbero y Luis Hernández Corbato

Editor General de la Real Sociedad Matemática Española: Alberto Ibort

Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección: Luis Hernández Corbato

Comisión de la Real Sociedad Matemática Española

Luis Hernández Corbato
*ICMAT, Madrid*

Miguel Domínguez Vázquez
*ICMAT, Madrid*

Javier Fresán Leal
*ETH, Zurich*

María Moreno Warleta
*IES Alameda de Osuna, Madrid*

María Pe Pereira
*ICMAT, Universidad Complutense de Madrid*

Óscar Rivero Salgado
*Universitat Politècnica de Catalunya*

Juanjo Rué Perna
*Universitat Politècnica de Catalunya*

Blanca Souto Rubio
*Colegio Ágora, Madrid*



ISBN: 978-84-910-7318-5

Depósito legal: M-760-2018

Impreso en España / *Printed in Spain*

*Gracias a Britta Egetemeier por su entusiasmo, a Elke Pose por cubrirme las espaldas, a Thomas Vogt por tantos buenos consejos y a Thorsten Heldmann por todo lo que no son matemáticas.*

"He cometido el mismo error que los artistas llevan cometiendo desde los tiempos de la antigua Grecia: situar las matemáticas junto a las artes como su sirvienta. Es una posición modesta, honorable y muy necesaria, puesto que la exactitud se halla en la base de todas las artes. Pero las matemáticas son tanto la hermana como la sirvienta de las artes, y están tocadas de la misma locura y el mismo genio. Es algo que hay que saber".

**Marston Morse,** *Mathematics and the Arts, 1950*

# Índice

# Prefacio

## ¿Qué es “hacer matemáticas”?

“Déjenme dar algunos números y hacer algunas cuentas para centrar el debate” es una frase maravillosa de la que todo tertuliano experimentado debería disponer en su arsenal. Mi intención inicial era emplearla como título del libro, pero mi editor se negó con el endeble argumento de que sería demasiado largo. Finalmente, nos pusimos de acuerdo en la versión abreviada que puede encontrar en la portada.

Dar algunos números, ¿y después qué? Después, sencillamente, ahí se quedan.

También podría haber llamado a este libro ¿Qué es hacer matemáticas? Sin embargo, ya existe una obra de Richard Courant y Herbert Robbins con ese título. Algunos asuntos en torno a este libro son dignos de mención, por ejemplo, que Courant escogió ese título algo sensacionalista por recomendación de Thomas Mann. Al margen de que Thomas Mann ya no podía serme de ayuda en la elección del título, tampoco quería escribir un libro de matemáticas clásico, como el de Courant y Robbins, en el que se presentasen las matemáticas; los conceptos, ideas, reflexiones, investigaciones y resultados matemáticos.

Mi libro va de *hacer matemáticas*, que es algo muy distinto. Pruebe a cambiar *matemáticas* por *el amor*: ¿Qué es el amor? ¿Qué es hacer el amor? De esto último tenemos una idea muy concreta, pese a que *hacer el amor* no es otra cosa que una mala traducción. El libro trata de las personas que se esconden tras los números y de los lugares en los que se hacen matemáticas. Va de la lucha con la precisión, de la tenacidad, los errores y el gusto por los detalles; va de grandes emociones, de los problemas que hacen que esa lucha merezca la pena, de reconocimientos y de premios.

Este libro es un viaje al mundo de los matemáticos. No se trata de un mundo secreto aparte, el mundo de los matemáticos es *nuestro* mundo. Las matemáticas no son ni mucho menos algo lejano y abstracto que se conoce y se odia en la escuela, sino que delimitan las líneas de fondo y los banderines de córner de un campo de juego por el que todos nos movemos de forma totalmente despreocupada. Un campo que pisamos incluso antes de aprender a contar: uno, dos, tres. ¿Se da cuenta de que las matemáticas nos acompañan desde la primera vez que nos atamos los cordones hasta que no nos queda más remedio que recurrir a una prótesis de rodilla? Hay matemáticas en casa, en la comunicación, en el tráfico y en la predicción del tiempo (sobre todo cuando acierta).

El mundo de los matemáticos tampoco es nada que le deba resultar extraño: hallará en este libro todas las secciones de las que periódicos y revistas se ocupan a diario porque son interesantes: famosos, historia, viajes, política, ciencia y tecnología, un poquito de esoterismo, el tiempo, enrevesados enigmas y una mirada al futuro. Obviamente, a la hora de determinar el enfoque principal, me he guiado un poco por mis propios intereses, predilecciones y aversiones; digamos que he dibujado una imagen de este amplio y fascinante mundo de las matemáticas y del quehacer matemático, *tal y como yo lo veo*. Mírelo como un viaje a la aventura con un guía turístico personal. ¡Bienvenido a bordo!

# Capítulo 1

## Sobre la recta numérica

"Todo es número", el lema escogido por los pitagóricos, condensaba la creencia de que las leyes del universo pueden ser comprendidas y expresadas mediante números. En realidad, es algo que todavía seguimos creyendo, y no sin motivo.

Pero si los números son tan fundamentales, entonces no nos queda más remedio que preguntarnos ¿qué son y para qué sirven los números? Esta cuestión puede parecer tonta o ingenua, pero no lo es. Fue formulada así por el matemático Richard Dedekind y no tiene una respuesta obvia. De hecho, no puede tenerla: quizá sea posible captar las leyes del universo con números, pero está claro que "uno, dos, tres" no bastan para ello, ya que incluso los números llamados *naturales* (uno, dos, tres, etc.), que tan maravillosamente concretos y *evidentes* nos resultan, nos plantean problemas. Problemas filosóficos, por supuesto, pero también problemas muy concretos.

Por tanto, insisto: ¿qué son los números?, ¿algo que designa cantidades? ¿Es entonces ½ un número?, ¿y –1?, ¿y $\sqrt{2}$ ? ¿Algo con lo que se puede contar? ¿Es entonces "infinito" un número? ¿Algo con lo que se puede calcular? ¿Un dominio en el que se pueden resolver ecuaciones? ¡Luego la "unidad imaginaria" $i = \sqrt{-1}$ es un número! Por si la respuesta a la pregunta no fuese ya lo bastante confusa, los matemáticos parecen no tener nunca bastante e inventan sin cesar números nuevos. ¿Se darán por satisfechos en algún momento?

### 3. ¿Saben contar las abejas?

Varios periódicos informaban en enero de 2009: "Las abejas saben contar hasta tres". Detrás del descubrimiento estaban investigadores del BEEgroup de la Universidad de Wurzburgo.

Sin embargo, recuerdo haber visto poco antes en otro titular que las abejas pueden contar hasta cuatro. ¿Qué está pasando?, ¿hasta tres o hasta cuatro? Esta vez, parece que la culpa no es de mi memoria, como confirma el registro mucho más amplio y fiable de Google: por ejemplo, en octubre de 2008 se podía leer lo siguiente: "Las abejas pueden contar hasta cuatro" en *netzeitung.de,* un periódico *on-line*.

Olvidemos por un momento que ya es bastante asombroso que las abejas puedan contar, sea hasta tres o hasta cuatro. Ignoremos también el misticismo que rodea a los números. Por ejemplo, como todos los números pequeños, el 3 está cargado de simbolismo. La Santísima Trinidad cristiana dice que de alguna forma el Padre, el Hijo y el Espíritu Santo forman juntos *un* Dios, o simplificando mucho, que "tres es igual a uno", lo que puede dar pie a todo tipo de debates de los que no nos ocuparemos aquí. Para nosotros, el 3 no es otra cosa que un número. Pero ¿qué significa?

Las dos noticias se referían a estudios distintos de científicos diferentes. En un primer intento, unas abejas fueron adiestradas para volar hacia paneles en los cuales se podían ver tres objetos dibujados, donde eran recompensadas con agua con azúcar. Las abejas aprendieron que solo recibían comida en los paneles con tres objetos, pero no en aquellos con cuatro o seis, independientemente de si los objetos en cuestión eran manzanas, flores, puntos rojos o negros. Los investigadores llegaron a la conclusión de que esas abejas habían desarrollado una noción "abstracta" del número 3, y que también podían distinguirlo del 4, ya que volaban hacia paneles con tres dibujos, pero no hacia otros con cuatro, cinco o seis. Los investigadores no consiguieron enseñar a las abejas a preferir paneles con cuatro objetos a paneles con cinco, de lo cual dedujeron que las abejas no podían distinguir entre el 4, el 5 y el 6. De ahí la noticia de que las abejas saben contar hasta tres, un notable logro para animalitos con un cerebro del tamaño de un grano de sésamo: los chimpancés y los seres humanos pueden captar hasta *cuatro* objetos de un vistazo, pero no más. Está demostrado que para registrar cinco o más objetos no basta con una mirada, debemos contarlos por pasos.

¿Debemos imaginarnos entonces a la espabilada abeja Maya y a su algo más atolondrado amigo Willi estirando los dedos mientras murmuran "uno, dos, tres…"? Sabemos que las abejas no tienen dedos, y que solo hablan en las películas.

Para "obligar" a las abejas a contar podemos emplear el siguiente experimento: dejamos volar a las abejas por un tubo de plexiglás con marcas e intentamos entrenarlas para que busquen comida en la tercera marca. Las marcas se realizan a intervalos distintos cada vez, para evitar que las abejas las busquen a una distancia determinada. En efecto, las abejas pueden aprender a contar hasta tres, es decir, a volar hasta la tercera marca. También pueden aprender a contar hasta cuatro, es decir, a buscar comida en la cuarta marca. Pero hasta ahí llega la capacidad de contar de las abejas, por muy pacientemente que se las trate de amaestrar.

Así fue como llegó a los periódicos alemanes la noticia "Las abejas saben contar hasta cuatro", llevando quizá al perplejo lector que un par de semanas más tarde se topaba con que "Las abejas saben contar hasta tres" a preguntarse "¿Saben contar los periodistas?". Al margen de esto, el profesor Srivanasan, uno de los responsables del experimento, explica que hay abejas que aprenden más rápido y otras que lo hacen más despacio, algunas más avispadas y otras algo torpes. No nos sorprende. Aun así, seguimos teniendo cariño a Willi.

Pero ¿saben también las abejas qué es *realmente* el número 3? Esta es una fecunda cuestión filosófica que no podemos dejar a estos laboriosos insectos. Naturalmente, aportar conceptos claros para responder limpiamente a estas preguntas es algo de lo que se ocupan los fundamentos de las matemáticas. Sin embargo, las respuestas no están claras desde tiempos inmemoriales ni fueron obtenidas en diálogos interminables en la antigua Grecia. Solo hacia finales del siglo XIX, la teoría de conjuntos desarrollada por Georg Cantor estableció la diferencia entre los números cardinales y los números ordinales. Los primeros describen el tamaño de un conjunto: un conjunto tiene uno, dos, tres o más elementos; representan pues una cantidad. Los segundos los obtenemos al ordenar..., y después contar: ¿qué posición ocupa un elemento en una secuencia? Hay una marcada diferencia entre ambos conceptos, incluso cuando son abejas las que cuentan. Solo los periodistas y sus titulares no lograron apreciarla. Tampoco es fácil.

No obstante, ¿debe impresionarnos que las abejas sepan contar hasta cuatro? Realmente, no. Es mucho más impresionante la danza que realizan para indicar a sus congéneres dónde encontrar comida. La danza tiene su aquel: dibujando líneas onduladas al bailar moviendo el abdomen, las abejas comunican a sus compañeras el ángulo respecto al sol que deben seguir para encontrar el camino al bufé. Claramente, a las abejas se les da mejor la geometría que la aritmética. Las matemáticas son tan diversas que todos pueden aprovechar sus habilidades...

## 5. ¿Saben sumar las gallinas?

Otro titular que socava nuestra presunta hegemonía matemática: “Los pollitos saben calcular –por lo menos hasta cinco–”. Lo han descubierto una científica italiana llamada Rosa Rugani y sus colaboradores. La noticia recorrió el mundo el 1 de abril de 2009, con el aviso explícito de que no se trataba de una de las bromas que los medios de comunicación anglosajones suelen difundir en esa fecha camufladas como noticias reales, de manera similar a lo que sucede en España con motivo del Día de los Inocentes. La British Broadcasting Corporation (BBC) la publicó en su página web con el titular sensacionalista “Baby chicks do basic arithmetic”, ilustrado con unas fotografías muy tiernas de pollitos. La noticia remitía a una supuesta publicación académica al respecto en el prestigioso *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*.

En efecto, tras una breve búsqueda en Google encuentro la página web correspondiente al artículo científico, publicado *on-line* también el 1 de abril. En el mismo se afirma que Rosa Rugani habría podido demostrar con un experimento muy ingenioso que los pollitos, incluso recién salidos del cascarón, son capaces de hacer de cabeza (cómo si no) operaciones matemáticas como 2 + 3 = 5.

No me lo acabo de creer, y estoy intranquilo. ¿Estos animalitos saben matemáticas? ¿Es una inocentada de abril o no? Probemos a tomárnoslo en serio, lo cual implicaría que al menos algunas operaciones matemáticas muy primitivas como la suma no solo son un juego de niños, sino que están al alcance incluso de pollitos recién nacidos. Pero ¿qué ganarían las aves con ello? Una respuesta simple sería que calcular confiere algún tipo de ventaja evolutiva. Efectivamente, creo que la inteligencia nos (!) debería dar algún (?) tipo de ventaja evolutiva (¡no está demostrado!), pero ¿a los pollitos?

Así pues, pido ayuda y aclaraciones a los lectores de mi blog *Mathematik für den Alltag* (Matemáticas para el día a día, disponible en www.wissenslogs.de) en la entrada "¿Saben contar los pollitos? ¡Ayuda!". El primer lector en hacer un comentario está completamente seguro de que las investigaciones de la Sra. Rugani son muy serias y aportan la evidencia adicional de que los pollitos son más inteligentes de lo que la gente piensa. El nombre del lector es Martin Huhn ("Martín Gallina", si lo traducimos literalmente al español).

En ese momento me acuerdo de que ya en los años ochenta un tal Luigi Malerba nos contaba lo siguiente desde Italia: una gallina sabia quería enseñar a las demás gallinas a contar y sumar. Escribió los números del 1 al 9 en una pared del gallinero y explicó que al juntarlos se podían obtener números mucho mayores. Para enseñar a sumar a las demás, escribió en otra pared: 1 + 1 = 11; 2 + 2 = 22; 3 + 3 = 33, y así sucesivamente, hasta 9 + 9 = 99. Las gallinas se aprendieron las sumas y las encontraron muy útiles.

Ahora ya está todo claro.

## 10. Y el nombre de la rosa

Recientemente, un amigo me informaba con orgullo de padre sobre los últimos progresos de su hijo de dos años, que ya sabe contar hasta cinco. Lo único es que no le gusta el dos, así que cuenta "uno (breve pausa), tres, cuatro, cinco". Ahora faltaría aclarar qué quiere decir el pequeño con "tres". Y debemos hacerlo *rápido*, antes de que aprenda a contar correctamente.

Nos encontramos con el mismo problema en otros lugares: en los aviones, no hay una fila que lleve el número 13. Sin embargo, los pasajeros de la fila con el número 14 se ubican en la decimotercera fila (esperemos que se sientan más seguros gracias al cambio de número). En el teatro o en la ópera, la alegría de haberse hecho con unas localidades en la primera fila a menudo se esfuma al descubrir que la primera fila es en realidad la séptima, detrás de las filas A, B, C, AA, BB y CC; o al darse cuenta de que el escenario es tan alto que los asientos en una primera fila que realmente es la primera automáticamente acarrean una inevitable tortícolis. Piense si no en la trilogía de ciencia ficción de Douglas Adams *El autoestopista galáctico*. Cuando salió a la venta el ¡quinto! volumen, decía en la portada que ese era un libro que daba "un significado completamente nuevo al concepto de trilogía". No se puede decir que no lo haga.

La reinterpretación de los números es un fenómeno cotidiano con el que nos topamos en todas partes. A pesar de ello, a mi amigo le preocupaba visiblemente que su hijo "contara mal". Naturalmente, podríamos contar de otra manera o incluso poner otros nombres a los números. Al fin y al cabo, tenemos una concepción bastante inamovible del significado del número 7 y de "contar hasta 7" que es completamente independiente del nombre que le pongamos al número. Concretamente, ©©©©©©©. Entonces, ¿por qué llamamos a los números como lo hacemos? ¿Son esos nombres que les damos importantes? “¿Qué es un nombre? La rosa no dejaría de esparcir su grato aroma, aunque se llamara de otra manera”, le dice Julieta a Romeo; ¿es esto cierto también para los números? En cualquier caso, una mirada a la historia nos revela que nuestro sistema numérico, el *sistema de numeración posicional indo-árabe en base 10*, no es una elección obvia ni indiscutible. Y no faltan alternativas al respecto.

## La historia del cero

El “descubrimiento del cero” suena a una minucia, pero es un importante hito cultural con consecuencias quizá más dramáticas que el descubrimiento de América (por Colón, en 1492) o de la penicilina (por Alexander Fleming, en 1928), aunque no conozcamos a los descubridores del cero. *Descubridores*, en plural, porque a lo largo de la historia de la humanidad el cero ha sido descubierto al menos en tres ocasiones, cada vez con un significado distinto: por los babilonios, que en torno al año 700 antes de Cristo ya utilizaban un símbolo con tres ganchos como “espacio vacío”; por los olmecas, y después por los mayas en Centroamérica, que (mucho antes de que Colón “descubriese” América) empleaban un símbolo para el cero en su calendario y, posteriormente, para un sistema de numeración en base 20; y, finalmente, en la India del Siglo V. Allí ya no se usaba el cero solamente como número y espacio en blanco, sino también como cifra en un sistema decimal que se empleaba para *hacer cálculos*. Debemos, pues, a un indio desconocido nuestro sistema de numeración posicional en el que 2001 designa un número con dos miles, cero centenas, cero decenas y una unidad, es decir, algo muy distinto de 201 o de 21.

El sistema de numeración posicional indio llegó a Europa Central a través del mundo árabe-islámico, con modificaciones en las cifras que no alteraron sus principios fundamentales. La leyenda atribuye un papel destacado al matemático Gerbert de Aurillac (ca. 945-1003), que fue papa con el nombre de Silvestre II entre 999 y 1003, pero no es cierto: este pontífice siguió entreteniéndose con su ábaco. El sistema de cifras entró al mundo occidental con la traducción de un libro árabe de cálculo en el siglo XII, pero solo logró imponerse gracias a la influencia de Leonardo de Pisa (conocido como Fibonacci, ca. 1170-1240), cuya obra principal, *Liber Abaci*, apareció en 1202.

El sistema decimal, y con él el cero, no llegó al “pueblo llano” alemán hasta inicios del siglo XVI. Adam Ries (ca. 1492-1559) regentaba una escuela de Matemáticas en la localidad sajona de Annaberg, que más adelante sería heredada por su hijo. Su segundo libro de aritmética, *Cálculo con líneas y plumas*, enseñaba a calcular no solo con el ábaco (“con líneas”), sino también en el sistema decimal indo-árabe (que se escribía “con la pluma”). Fue un auténtico e inesperado *best seller* con al menos 120 ediciones y sirvió como libro de texto hasta bien entrado el siglo XVII. Desde entonces y hasta hoy, los alemanes se refieren a él para certificar que una operación ha sido realizada correctamente: 120 + 69 suman 189, “según Adam Ries”.

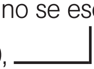
El sistema de numeración posicional permite representar números muy grandes sin mayor esfuerzo –desde luego, mejor que el sistema de numeración romano, al que remplazó–. No hay ningún problema en escribir MMI en lugar de 2001, pero en números romanos mil millones tienen este aspecto:

MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM

Para extender un recibo por mil millones de euros, necesitaríamos escribir un millón de veces la letra “M”. No parece nada práctico.

A propósito de números grandes, cuando recientemente se destapó que un humilde empleado de banca francés se había jugado cincuenta mil millones de euros y había perdido una considerable fracción de dicha suma por una crisis bursátil, el *Tagesspiegel* berlinés publicó a este respecto: “Si quisiéramos escribir aquí esta suma inconcebiblemente grande, la última cifra iría a parar a algún lugar de la sección de anuncios por palabras”. Sin lugar a dudas, se quería dar a entender que la transcripción del número cincuenta mil millones se extendería desde la página 6 del periódico hasta la 21, lo cual sería mentira incluso escribiéndolo con números romanos. Está claro que el *Tagesspiegel* tiene serias dificultades con los números grandes. Se une así a una larga tradición: circulan rumores incluso acerca de ministros de Economía incapaces de contestar a una pregunta sobre cuántos ceros hay en mil millones. En la campaña electoral para las elecciones generales alemanas de 2009, el entonces ministro de Hacienda confundió miles de millones y billones ante las cámaras de televisión.

## Base 10

Claro, diez dedos. Pero al margen de que también conozco matemáticos con nueve dedos, igualmente podríamos ignorar los lejanos pulgares y calcular en base 4 u 8. Así lo hacían, por ejemplo, algunos indígenas suramericanos. También podríamos hacer cuentas con los dedos de las manos y los de los pies, en base 20. Incluso un sistema duodecimal estuvo muy extendido –sus restos se atisban en nuestra forma de contabilizar horas y meses–. En Babilonia se empleaba un sistema en base 60. (Es muy poco práctico: ¡imagínese tener que estudiarse las tablas de multiplicar para los números de una sola cifra!) Por su parte, los ordenadores funcionan en binario, es decir, en base 2. Para ellos es más conveniente. Sin embargo, las cifras más bonitas que conozco son las creadas para un sistema octal llamado *Octomatics*. En él, las cifras no se escriben 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sino de forma mucho más sistemática:  para el 0,  para el 1,  para el 2s, y después , , , ,  para el 3, 4, 5, 6 y 7. Es una notación fácil de entender y de recordar (una raya a la derecha significa 1, en el medio 2 y, a la izquierda, 4, y luego se van sumando), bonita de escribir, y es muy fácil calcular con ella. Aun así, su uso no se generalizará.

## Al revés

Parece lo más lógico no limitarse a escribir los números indo-árabes de izquierda a derecha, sino también leerlos siempre así. El número 3514 sería entonces “tres mil quinientos diez y cuatro”, y no “tres mil quinientos catorce”. Si bien en español esta alteración afecta únicamente a los números del 11 al 15 que, por así decirlo, tienen un nombre propio, en otras lenguas está más extendida. Como recordará de sus clases de Inglés, en Gran Bretaña 14 se dice *fourteen* y 19 *nineteen*, pero eso no es nada comparado con lo que sucede en alemán: en esta lengua, la inversión afecta a todos los números de dos cifras, desde el 21 (*einundzwanzig*, algo así como “uno y veinte”) hasta el 99 (*neunundneunzig*, que vendría a ser “nueve y noventa”). La inversión de los dígitos tiene una larga historia; proviene del indoeuropeo y ha perdurado hasta nuestros días.

Por ejemplo, los libros de texto del honorable señor Ries instruían en la pronunciación de los números de izquierda a derecha, pero sin corregir la inversión de las últimas dos cifras. Otro autor, Jakob Köbel, secretario municipal de Oppenheim, presentó los números del 21 al 99 al derecho –o sea, desde el *zwanzig-eins* hasta el *neunzig-neun*– en la guía de pronunciación de su libro de texto de 1520, sin advertir al lector de lo poco común de esta elección. Köbel tampoco fue del todo coherente, ya que no invirtió los números del 13 al 19: nada de *zehn-drei*, *zehn-vier*, y así hasta *zehn-neun*.

Quedémonos simplemente con que sería más *lógico* y *sistemático* y *sencillo* y menos *propenso a errores* leer los números en el orden en el que están escritos –pero ya es imposible implantarlo en Alemania–. Otros pueblos han sido más receptivos a los cambios a este respecto. Por ejemplo, los noruegos reformaron por ley su pronunciación en 1950. En Alemania, una asociación muy activa llamada Zwanzig-eins e. V., liderada por Lothar Gerritzen, profesor emérito de Matemáticas de la Universidad de Bochum, lucha desde hace años por que las escuelas alemanas admitan al menos como alternativa la pronunciación “al derecho” *zwanzig*, *zwanzig-eins*, *zwanzig-zwei*.

Me parece acertado y deseable: fomentaría en clase una relación más creativa con los números e introduciría un elemento de anarquía que es urgentemente necesario. Quizá llegase incluso a tener efectos comparables a los de la reforma de la ortografía alemana, que ha llevado a que, actualmente, los alemanes, en lugar de atenerse a lo que prescriben las reglas ortográficas antiguas, escriban según su *interpretación personal* de lo que dice la ortografía reformada. Este tipo de anarquía y diversidad es algo hermoso.

Por otra parte, leer los números del 21 al 99 al revés es parte de la cultura alemana, y eso no es algo que se pueda cambiar con leyes. Por eso, Nena seguirá viendo en el horizonte *neunundneunzig* (“nueve y noventa”) y no *neunzig-neun* (noventa y nueve) globos. Exactamente igual que los cantantes españoles seguirán cantando que “quince años tiene mi amor”, por mucho que luego tarden “en aprender a olvidarla, diecinueve días y quinientas noches”.

## 13. ¿Mala suerte?

El 13 es quizá el número más cargado de emociones. Augura mala suerte. Mientras en España se teme en particular al martes y 13, en Alemania y el mundo anglosajón el viernes 13 es especialmente temible. Es algo que todo el mundo sabe, pero aun así resulta curioso. A propósito de emociones: ¿Le gusta el número 28? ¿Qué le inspira el 9973?

Daniel Tammet, el joven autista británico que narra su historia en *Nacido en un día azul*, describe el 13 como un número pequeño. Es un número primo, y para él los números primos son planos y redondos, “como piedrecitas en una playa”. Por lo demás, no ve en el 13 nada extraordinario ni, desde luego, nada amenazador. Los números son sus amigos; y a los amigos no se les percibe como una masa informe, sino que uno disfruta de su individualidad.

¿Qué tiene entonces de especial el 13? Aquí las matemáticas no pueden ayudarnos. Sí, el 13 es un número primo, uno de tantos (de hecho, entre infinitos). También es un número de Fibonacci: nos lo encontramos en la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... en la que cada número es igual a la suma de los dos anteriores. No sabemos si existen infinitos números primos que al mismo tiempo sean números de Fibonacci. Es un problema abierto –que tampoco convierte al 13 en especialmente interesante.

En Italia se cree que en realidad el “número gafe” es el 17, mientras que el 13 viene acompañado de buena suerte. No obstante, una mesa con 13 comensales se considera un signo fatal, quizá en honor a la Última Cena. La superstición está tan profundamente arraigada que el ex primer ministro Silvio Berlusconi habría mandado al diputado (y posteriormente ministro de Cultura) Sandro Bondi a comer a la cocina tras caer en la cuenta de que había invitado a exactamente 12 comensales.

Sin embargo, lo del viernes 13 es una invención reciente con origen en el siglo XIX. Creemos incluso conocer a su inventor: un americano llamado Thomas William Lawson, que se hizo rico especulando con acciones y en 1907 escribió una novela sobre la bolsa titulada *Viernes 13*, posteriormente llevada a la gran pantalla. Una vez que algo como la presunta conexión fatídica entre “viernes 13” y “mala suerte” está en el aire, se hace cada vez más fuerte. Luego, ya da igual que el legendario “viernes negro” del año 1929, el colapso de la bolsa de Nueva York que dio inicio a la Gran Depresión, tuviera lugar en realidad un jueves y continuara el lunes siguiente, ni siquiera que no fuera el 13, sino el 24 de octubre. ¿O acaso no es esconderse precisamente una característica propia de este “número gafe”?

También hay una leyenda urbana que asegura que en viernes 13 hay muchos más accidentes de tráfico de lo normal. La explicación va incluida: el viernes 13 todo el mundo está especialmente nervioso y conduce de forma particularmente insegura, y entonces ¡pam!, se producen los accidentes. No está claro que sea cierto ni que se pueda demostrar estadísticamente: según el análisis de Edgar Wunder (que en español se traduciría literalmente como “Edgar Maravilla”), en la *Zeitschrift für Anomalistik* del año 2003 (una revista que no conocía hasta ahora y que, al parecer, es escéptica con los escépticos), no hay ni más ni menos accidentes en viernes 13 que el viernes 6 de la semana anterior o el viernes 20 de la posterior.

¿Teorías de la conspiración? ¿Profecías autocumplidas? Sea como sea, el miedo exagerado y patológico al número 13 es tan terrible y está tan extendido que los psiquiatras han acuñado un nombre técnico para esta enfermedad: *triscadecafobia*. No es nada fácil de pronunciar si uno no habla griego; o si tiene miedo de palabras en otros idiomas, algo para lo que seguro que también existe un nombre técnico pseudogriego. Incluso peor es *parascevedecatriafobia*, que designa presuntamente el miedo al viernes 13.

¿Hay algo más que destacar, al margen del diagnóstico psicológico que, al fin y al cabo, poco tiene que ver con el número en sí? El 13 parece ser especialmente poco frecuente en la lotería, por lo menos hasta ahora en el sorteo alemán "6 aus 49" –el equivalente a la Lotería Primitiva española–. Eso sí, solo los sábados, los miércoles es el 32 y últimamente el número que menos sale es el 21. Sin embargo, análisis rigurosos revelan que la diferencia no es estadísticamente significativa. Así pues, las teorías de la conspiración del estilo de "la bola con el 13 es más pequeña que las demás" no están justificadas.

Por otro lado, en nuestro calendario el día 13 cae muy a menudo en viernes. Este hecho se debe a las particularidades del calendario gregoriano, introducido por decreto papal en los territorios católicos romanos a partir del año 1582, y que se ha acabado extendiendo a todo el mundo. En este calendario, los años normales tienen 365 días. Si el año es divisible por 4, entonces es un año bisiesto de 366 días. Sin embargo, este día extra no se añade si el año es divisible por 100, a no ser que sea también divisible por 400. En resumen, el calendario se repite cada 400 años, en los cuales hay en total 400 × 365 días, más 100 días extra, a los que hay que restar 3 por las excepciones. En total hacen 146 097 días, que son exactamente 20 871 semanas. El 19 de mayo de 1963 y el 19 de mayo de 2363 (mi cero y mi cuatrocientos cumpleaños) caen pues en el mismo día de la semana.

Pero 400 años son también 4800 meses y, por tanto, hay 4800 días que son "el trece" del mes. Este número no es divisible entre 7, por lo cual es imposible que el 13 caiga las mismas veces en cada día de la semana. Si hacemos la cuenta, el resultado es que el viernes es el día de la semana más habitual (688 veces), y el jueves y el sábado son los menos frecuentes (solo 684 veces).

¿Casualidad? Por supuesto que no. Depende de en qué día de la semana empieza el calendario, es decir, de detalles específicos de las decisiones que se tomaron al adoptar el calendario gregoriano, todas ellas con bendición papal. El año 1582 fue diez días más corto, de modo que al jueves 4 de octubre le siguió el viernes 15 de octubre. Pura arbitrariedad del pontífice: si se hubiese decidido en ese momento que después del jueves 4 de octubre se debía continuar con el lunes 15 de octubre, es decir, saltando diez días no solo en la fecha, sino también en los días de la semana, entonces el 13 caería ahora muy a menudo en lunes. Debido a la técnica de salto elegida por el papa y a las citadas excepciones antes mencionadas, no solo hay muchos viernes 13, sino que además es habitual que se acumulen varios en breves períodos: si el 13 de febrero cae en viernes, entonces también lo hace el 13 de marzo, siempre que el año no sea bisiesto. ¡Y lo mismo sucede en noviembre! Y así tanto para 2009 como para 2015. Pero ya sabemos que las desgracias nunca vienen solas…

*Escrito el miércoles, 8 de abril de 2009. Ya he resistido dos "viernes 13" este año. El tercero no me pilló desprevenido.*

## 42. ¿La respuesta a todo?

El número 42 es la "*Respuesta a la Gran Pregunta de la Vida, el Universo y Todo lo Demás*". Es algo que se aprende nada más empezar el primer volumen de la trilogía *Guía del autoestopista galáctico*, de Douglas Adams: el 42 es el resultado del cálculo de un ordenador llamado *Pensamiento Profundo* que fue ensamblado por ratones y que, después de calcular durante siete millones y medio de años, anuncia la respuesta: "cuarenta y dos". Pero, lamentablemente, no puede decir cuál es esa cuestión fundamental que tiene "cuarenta y dos" como respuesta. Por ello, a continuación se construye un ordenador mucho mayor, más complejo y costoso, llamado *Tierra*, que desgraciadamente es demolido antes de desvelar la pregunta.

¿Un número, un número tan banal como el 42 como la respuesta definitiva a la pregunta por el sentido de la vida? Debería darnos qué pensar. Pero es aún peor; no se averigua cuál es esa pregunta hasta el final del segundo volumen de la trilogía. La pregunta es "¿Cuánto es 6 × 9?".

Antes de gritar "¡Un momento, pero si eso no da 42!", recuerde lo siguiente: todos creemos que las matemáticas son un sistema *consistente*, y que, mientras no nos equivoquemos, no hay lugar a la contradicción. Por lo menos, al operar con los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, … Es algo en lo que confían todos los matemáticos, pero que no está *demostrado* y que de hecho no es ni siquiera *demostrable*.

Aunque hay que reconocer que los matemáticos se han esforzado mucho en ello. Hacia el final del siglo XIX quedó claro que es posible crear enunciados autorreferenciales que no pueden ser ni verdaderos ni falsos. Piense, por ejemplo, en un barbero que afeita a todos los hombres de su pueblo que no se afeitan a sí mismos, y a nadie más. ¿Qué pasa entonces con el barbero? ¿Se afeita a sí mismo o no? Si lo hace, entonces la frase que lo define es falsa ya que según ella no podría afeitarse a sí mismo. Pero, si no lo hace, entonces es un hombre que no se afeita a sí mismo, por lo que ya no estaría afeitando a *todos* los hombres del pueblo que cumplen con ese requisito…

Las matemáticas pueden sobrevivir perfectamente sin barberos, pero deben andarse con mucho cuidado con construcciones como "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elemento", puesto que no puede ser ni cierto ni falso que se contenga a sí mismo. Estas paradojas condujeron a la llamada *crisis fundacional de las matemáticas*. Para superarla, el matemático alemán David Hilbert formuló un ambicioso programa de trabajo destinado a establecer bases sólidas para esta disciplina. Su inesperado fracaso fue consumado por el teorema de incompletitud, formulado y demostrado (!) por Kurt Gödel. Este teorema también prueba que la consistencia de la aritmética elemental, es decir, de las operaciones con los números naturales, es indemostrable.

En este sentido, los matemáticos estamos algo indefensos frente a afirmaciones como el $6 \times 9 = 42$ del libro de Douglas Adams, que luego se esgrime como prueba de que algo está mal en el mundo. Quizá también porque, obviamente, en el fondo todos creemos y sabemos que hay muchas cosas que efectivamente están mal en el mundo, pero esperamos que al menos los cimientos sí sean sólidos. Y entre ellos se encuentran, junto al libre albedrío y las normas de circulación, las operaciones con los números naturales.

Por lo demás, el teorema de la incompletitud de Gödel no solo abrió la veda para el autor británico Douglas Adams, sino también para la filósofa sueca Astrid Lindgren, a la que debemos las siguientes líneas:

*Dos por tres son cuatro,*
*y tres más hacen nueve.*
*Me hago el mundo*
*como a mí me gusta.*

Así suena, en su versión alemana, la canción inicial de la serie del año 1968 *Pippi Calzaslargas*[1]. Inmediatamente, continúan los ofrecimientos:

*Tres por tres son seis.*
*¿Quién lo quiere aprender conmigo?*

Así como:

*y, a todo el que nos quiera,*
*así le enseñaremos a sumar.*

Supongamos, por el momento, que la canción no señala problemas reales en los fundamentos de la aritmética, sino que es solo una muestra de gran fantasía y algunos errores de cálculo. ¿La santa Pippi, de nombre completo Pippilotta Victualia Rogaldina Socominsa, hija de Efraim Langstrump, la inventora de la "plumiticación", como patrona de los errores de cálculo? Deberíamos presentar una solicitud. Podríamos quizá incluso ganar para la causa a algunos partidarios en las altas esferas, como algún que otro ministro de Economía o de Hacienda, a los que les encantan esos déficits que se parecen cada vez más al resultado de una división por cero. O, más poderosos aún, alguien de Microsoft: Microsoft Excel 2007 perpetraba alegremente multiplicaciones como la siguiente:

$$850 \times 77{,}1 = 100\,000.$$

[1] El lector nostálgico recordará sin duda que esta original aritmética está ausente de la traducción española de la canción, en la que Pippi nos presenta a su mono, a su caballo y a su padre. [N. del T.].

(El resultado correcto es 65 535). ¿Es esto más o menos grave que 6 × 9 = 42 o 2 × 3 = 4? Una vez más, se tambalea nuestra confianza en el sentido de la vida o en la fiabilidad de ciertos programas informáticos (elija usted mismo).

## 91: los números del hueso

Los números primos son los átomos de la aritmética: números indivisibles. Más exactamente, números naturales que no pueden ser obtenidos como producto de números naturales más pequeños. Es decir, el 2, 3, 5, 7, ...(por convención, el 1 no es considerado un número primo). También por eso, los números primos aparecen muy pronto en la historia de las matemáticas, porque después de contar viene enseguida multiplicar y con ello factorizar.

Un utensilio prehistórico acredita cómo de pronto aparecieron. En el Real Instituto Belga de Ciencias Naturales de Bruselas se conserva un pequeño fósil de animal de diez centímetros de largo que fue hallado en 1960 en África Central, concretamente en Ishango, en la orilla congoleña del lago Eduardo, que sirve de frontera con Uganda. El hueso proviene de un asentamiento junto al lago que fue sepultado por la erupción de un volcán, algo así como una Pompeya prehistórica. De acuerdo con una moderna datación por radiocarbono, posee al menos 20 000 años de antigüedad, lo cual tampoco tiene demasiado mérito por sí mismo. Entonces, ¿por qué es tan especial? El fósil está decorado con un cristal en uno de los lados y es posible que tuviera algún significado ritual. ¿Sigue sin parecerle suficiente? Pues bien, en el hueso hay muescas en pequeños grupos, ordenados en tres filas. En una de las tres filas se encuentran grupos de 9, 11, 19 y 21 muescas (60 en total), en otra fila 11, 13, 17 y 19 muescas –los números primos entre el 10 y el 20, que de nuevo suman 60.

¿Es una casualidad que en el pequeño hueso aparezcan justamente los números primos entre el 10 y el 20? No lo sé; nadie lo sabe. ¿Quizá 11, 13, 17 y 19 son los resultados de operaciones matemáticas en un sistema en base 6, como múltiplos de 6 a los que se ha sumado o restado uno? En cualquier caso, en una época en la que los nativos del lago de Ishango aún no conocían la escritura, de hecho mucho antes de que esta apareciera en el mundo, alguien se dedicó a jugar con los números, y este (o esta) alguien ¡se topó accidentalmente con los números primos, los átomos de la aritmética!

Esta fila de números primos en el hueso de Ishango es el testimonio más antiguo de cultura matemática que conocemos. Muestra precisamente números que nadie entendía ni podía entender por aquel entonces, ya que se considera más bien improbable que las personas de Ishango supiesen multiplicar (¿o no es más que una consecuencia de nuestra falta de imaginación?), y sin multiplicación no estaban en condiciones de reconocer si los números eran primos o no. Un número que no es primo es compuesto, por tanto, tiene un factor que, o bien es primo, o bien puede a su vez ser descompuesto en factores más pequeños y podemos seguir con el análisis.

Por ejemplo, el número 91 es más pequeño que 100 = 10 × 10; si el 91 es compuesto, entonces uno de los factores debe ser menor que 10 (puesto que, si en una descomposición en dos factores ambos son mayores que 10, entonces el resultado de la multiplicación tiene al menos tres cifras). Así pues, un número de dos cifras como el 91 es primo si no es divisible por 2, 3, 5 o 7. Los números divisibles por 2, es decir, los números pares, los podemos reconocer a primera vista (por su última cifra: 0, 2, 4, 6 u 8); los números divisibles por 5 los podemos reconocer igualmente por la cifra final (0 o 5); los números divisibles por 3 los podemos reconocer por la suma de sus cifras (que es divisible por 3). Solo queda el riesgo de que sea divisible por 7, algo que no se distingue a primera vista.

Esta es la magia del 91, mi "número primo favorito". Parece un número primo, pero no lo es: 91 = 7 × 13.

Hoy día sabemos mucho más sobre los números primos, pero aún no hemos conseguido entenderlos del todo. Comprobar si un número es primo o no sí se considera ya sencillo, tanto en la teoría como en la práctica. El problema teórico constituye una de los grandes problemas de las matemáticas resueltos recientemente: Carl Friedrich Gauss (1777-1855) lo formulaba así en su obra principal, las *Disquisitiones Arithmeticae*, de 1801:

> *El problema de distinguir números primos de números compuestos y de descomponer estos últimos en sus factores primos es conocido como uno de los más importantes y útiles en aritmética. Ha ocupado la industria y la sabiduría de geómetras antiguos y modernos de tal grado que sería superfluo discutir el problema aquí detenidamente.*

De hecho, Gauss está planteando dos retos diferentes: "distinguir" los números primos de los números compuestos, y "descomponer" o factorizar estos últimos, es decir, expresarlos como productos de números primos. El segundo de estos problemas se sigue considerando difícil en la actualidad; el primero está resuelto. Lo lograron tres indios hace unos años: el 4 de agosto de 2002, Manindra Agrawal, del Instituto Indio de Tecnología de Kanpur, y sus estudiantes de Grado Neeraj Kayal y Nitin Saxena enviaron su solución del problema a quince especialistas. Cuatro días después, el *New York Times* titulaba "New Method Said to Solve Key Problem in Math".

En el año 2004, la solución apareció en un artículo en los *Annals of Mathematics*. El *método AKS* (donde las siglas hacen referencia a Agrawal, Kayal y Saxena) permite comprobar de manera eficiente y con un 100 % de seguridad si un número dado es primo o no. De todas maneras, cuando realmente se trata de obtener con rapidez un resultado para un número concreto, no se emplea el algoritmo AKS teórico, sino combinaciones de astucias y trucos que en teoría podrían atascarse, pero que en la práctica dan un resultado impresionante: hoy día, números con un par de cientos de cifras no suponen ningún esfuerzo para un ordenador portátil convencional.

El segundo problema de Gauss, es decir, hallar qué factores primos forman un determinado número compuesto, es considerado difícil. El economista y lógico británico Williams S. Jevons ya observó en 1874 que, si bien multiplicar es fácil, por el contrario, factorizar no lo es:

> *¿Sabría decir el lector qué dos números dan como resultado el número 8 616 460 799 al ser multiplicados el uno por el otro? Me parece improbable que nadie, aparte de mí mismo, llegue a saberlo jamás.*

Nosotros estamos mejor informados: el matemático Derrick Norman Lehmer solucionó el ejercicio en 1903 y, hoy día, el programa informático de álgebra Maple da una respuesta instantánea: 96 079 × 89 681. Sin embargo, Jevons tenía razón: multiplicar números es fácil, encontrar números primos grandes y comprobar que lo son es fácil, pero factorizar un número compuesto de 200 cifras sigue siendo difícil en pleno siglo XXI, incluso con la ayuda de supercomputadoras.

Las reflexiones de Jevons no eran meros pasatiempos académicos. Quería utilizarlas para encriptar, y es que "multiplicar es fácil, factorizar es difícil" puede traducirse como "encriptar es fácil, descifrar es difícil". De hecho, la observación de Jevons constituye un precursor temprano del llamado *sistema de cifrado RSA*, desarrollado en 1977 por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, del Instituto de Tecnología de Massachusetts (Massachusetts Institute of Technology, MIT). Con este método, los tres fundaron juntos la empresa RSA Data Security en 1982 y patentaron su sistema en Estados Unidos un año más tarde. Ojalá ganaran mucho dinero. En la actualidad, todavía se recurre a variantes del algoritmo RSA para el cifrado en internet, por ejemplo para negocios bancarios.

La seguridad en internet depende pues por completo de la dificultad que reviste descomponer números en sus factores primos, incluso cuando sabemos a ciencia cierta que el número *es compuesto* y, en consecuencia, es posible hacerlo. Si alguien llegase a desarrollar un método para *factorizar* números grandes (de unas 400 cifras), ese alguien podría enterarse al detalle de todo lo que sucede en internet, espiar ordenadores y manipular negocios bancarios. Naturalmente, entre los muchos interesados en este asunto se cuentan los servicios secretos de diversos países: por ejemplo, la Agencia de Seguridad Nacional (National Security Agency, NSA) norteamericana tiene en nómina a muchos centenares de matemáticos de primer nivel, sobre todo especialistas en teoría de números. También eran varios los servicios secretos, como el Cuartel General de Comunicaciones del Gobierno (Government Communications Headquarter, GCHQ) británico, que conocían el propio algoritmo RSA mucho antes de 1977.

No sé qué sabían realmente o qué eran capaces de hacer, eso no lo sabe nadie con exactitud –esta afirmación es tan válida para los matemáticos que trabajan para los servicios secretos como para los trogloditas de Ishango de hace 20 000 años…

## 1729. El taxi de Hardy

El 2 es el menor número primo. El 3 es el menor número primo impar (y las abejas saben contar hasta 3, ¿o era hasta 4?). El 4 es el menor número compuesto, y también es la suma más pequeña de dos números primos. El 5 es un número primo, pero es, asimismo, la suma de dos números primos. (Problema abierto: ¿existen infinitos números que reúnan estas dos propiedades? Probablemente, sí.) Es, además, un primo de Fermat: uno más una potencia de dos, $5 = 2^2 + 1$. (Otro problema abierto: ¿existen infinitos números primos de Fermat? Probablemente, no).

El 6 es un número "perfecto", que es igual a la suma de sus divisores propios, $6 = 1 + 2 + 3$. (Problema abierto: ¿hay números perfectos impares?). El 7 es un "primo de Mersenne", $7 = 2^3 - 1$. (Problema abierto: ¿existen infinitos de estos números? Probablemente, sí) y $n = 7$ es el menor número de vértices para los cuales el polígono regular de $n$ vértices no puede ser construido solo con regla y compás. (Esto está demostrado). El 8 y el 9 son interesantes porque son las únicas potencias consecutivas de números naturales, $8 = 2^3$ y $9 = 3^2$. (Esta era la *conjetura de Catalan,* demostrada en 2002 por Preda Mihăilescu). El 10 es la base de nuestro sistema de numeración, el 11 pertenece al par de primos gemelos 11 y 13, el 12 tiene un número especialmente grande de divisores, el 13 trae mala suerte (o no), etc.

¿Etcétera? ¿Tiene cada número una historia, una característica especial, es el punto de partida de una construcción interesante u objeto de una enrevesada conjetura? ¿Son interesantes todos los números? Si no todos los números son interesantes, entonces existe el menor número natural que no es interesante. Pero con esta definición incurrimos directamente en una contradicción lógica, ya que "el menor número natural que no es interesante" ¡es obviamente muy interesante por este mismo motivo! Así, queda *lógicamente demostrado* que no existe un menor número no interesante, por lo cual todos los números son interesantes.

¿Dónde está el error en este razonamiento? Claramente en que "ser interesante" no es una característica definida o que sea posible definir con precisión, sino en última instancia una cuestión de gustos e intereses. Sobre gustos no hay nada escrito y tampoco se puede determinar el interés de algo tan fácilmente. A lo mejor los números pueden ser no solo interesantes o no interesantes, sino también *muy interesantes*, *poco interesantes* o *muy poco interesantes*.

Dejando a un lado estas consideraciones, saber reconocer cuándo un número es interesante también es una cuestión de *mirada matemática*. En una visita a su genial colega indio Srinivasa Ramanujan, el matemático británico G. H. Hardy mencionó de pasada haber llegado en el taxi número 1729 –un número absolutamente carente de interés–. "¡No!", protestó inmediatamente Ramanujan, el número 1729 es muy especial, "porque es el menor número que puede escribirse de dos formas diferentes como la suma de dos cubos perfectos: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$".

Los aficionados a la historia y a la música podrían dar algunos argumentos adicionales: el año 1729 nació la zarina Catalina II de Rusia y fue estrenada la *Pasión según San Mateo* de Johann Sebastian Bach, pero ¿hace esto interesante al *número* 1729? Por mi parte, añado lo siguiente: el 1729 es un número que parece primo pero no lo es, sino divisible por 1 + 12 = 13 y por 9 + 10 = 19. Esto no es una coincidencia en absoluto, sino que está relacionado con el descubrimiento de Ramanujan…

## 119/100. Un alto porcentaje

¿Cuál es su fracción favorita? Quizá sea la primera vez que le hacen esta pregunta. Un número favorito sí, pero ¿una fracción favorita?

Al preguntar al respecto a unos cuantos colegas, de la mayoría no coseché más que una mirada asombrada (que venía a decir algo así como "Qué raro es este Ziegler a veces…"). Casi todos los matemáticos podrían nombrar un número favorito al ser preguntados por él: el 7, el 42 o el número π, pero ¿una fracción?

Mi compañero Christof Schütte, de la Universidad Libre de Berlín, al que importuné con la preguntita durante la fiesta que celebraba en su jardín con motivo de su 43 cumpleaños, fue el único en responder sin un atisbo de duda: "3/7, desde siempre". ¿Por qué? No lo podía explicar con exactitud, pero de 1/7 siempre le había gustado su expresión decimal:

$$0{,}142\,857\ \ 142\,857\ \ 142\,857\ \ 142\,857\ \ 142\,857\ \ 142\,857\ \ 142\,857\ \ 142\,857\ \ 142\,857$$

que se repite una y otra vez cada seis cifras, y tras la coma empieza igual que π = 3,14… Y

$$\frac{3}{7} = 0{,}428\,571\ 428\,571\ 428\,571\ 428\,571\ 428\,571\ 428\,571\ 428\,571\ 428\,571\ 428\,571$$

tiene la misma sucesión de números tras la coma, ¡solo falta el primer 1! ¡Y, además, empieza por 42!

No obstante, creo que la fracción más importante tanto en mi vida como en la suya no es 3/7, sino 119/100 = 1,19. Normalmente conocemos la operación "multiplicar por 1,19" por un nombre muy distinto, concretamente como "meter el IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido)", lo cual no contribuye precisamente a convertir el 119/100 en la fracción favorita de nadie. En realidad, solo entusiasma a ministros de Economía y Finanzas. Pero ¡vaya si es importante! Por otra parte, resulta admirable que "meter el IVA" pueda llevarse a cabo tan fácilmente con una simple multiplicación. Además, "meterle" transformado en una multiplicación significa usar las matemáticas en lugar de la violencia, y eso es bueno.

## π. ¿Bello como la Mona Lisa?

La religión y las matemáticas prometen verdades eternas, pero las matemáticas son mucho más precisas en los detalles, en los números detrás de la coma. El Antiguo Testamento ofrece un punto de referencia concreto para tales aseveraciones en el primer Libro de los Reyes, Capítulo 7. Allí se narra la construcción del Templo de

Salomón. Para equiparlo, se hizo venir de Tiro a un tal Hiram, “lleno de ciencia, pericia y experiencia para realizar todo trabajo en bronce”, que fundió dos columnas de bronce frente al templo, y a continuación se describe su hazaña:

> *Hizo el mar de bronce fundido. Tenía diez codos de borde a borde; era enteramente redondo, y de cinco codos de altura. Un cordón de treinta codos medía su contorno.*

La misma descripción se encuentra, casi literalmente, en el Capítulo 4 del mismo Libro de las Crónicas. Parece que aquí alguien se ha limitado a copiar sin hacer los cálculos: si el “mar” (que viene a ser más bien una fuente redonda) tiene un diámetro de exactamente 10 codos, entonces el perímetro debería ser de $\pi \times 10$ codos, es decir, de aproximadamente 31,4 codos. Si un codo bíblico mide unos 45 centímetros, las cuentas arrojan una discrepancia de más de 60 centímetros.

Y es que el número π no es igual a 3, ni tampoco en la práctica es suficiente en ningún caso con “π es aproximadamente igual a 3”. Pero ¿cómo de exactos tenemos que ser si no nos conformamos con esta aproximación tan burda? Recordamos del colegio que π es más o menos igual a 3,14 o, como fracción, que π es más o menos 22/7. El fallo en ambas aproximaciones es de en torno a una milésima y media, lo cual supondría todavía un error de un par de milímetros para la fuente bíblica. ¿Es lo bastante exacto?

*En la práctica*, es una cuestión del ámbito de aplicación. Ya en una fuente de bronce en tiempos de Salomón probablemente se quisieran evitar discrepancias imprevistas de siete milímetros. No nos puede sorprender, entonces, que sean necesarios un par más de decimales para las tecnologías actuales, cuya precisión debe ser satisfactoria desde escalas atómicas (semiconductores) hasta distancias astronómicas (comunicación por satélite). Para su uso doméstico debería valer con la aproximación a diez decimales que nos proporciona cualquier calculadora barata.

*En la teoría*, no es ni mucho menos suficiente con eso. Sabemos desde el siglo XVIII que π no es “racional” o, lo que es lo mismo, que no puede ser representado con una fracción –lo demostró Johann Heinrich Lambert en 1761–. Por eso, valores como 22/7 o 355/113 o 3,141 592 653 5 = 31 415 926 535/10 000 000 000 solo pueden ser correctos aproximadamente. La expresión decimal

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,105\,820\,974\,94$$

tampoco termina nunca ni llega un momento en que empiece a repetirse; no se vuelve “periódica” por mucho que esperemos o por muy lejos que busquemos.

El número π ha fascinado a los seres humanos desde los inicios de la civilización, y sigue haciéndolo a día de hoy. No se trata exclusivamente de calcular el número con la mayor exactitud posible. Por ejemplo, el italiano Pietro Mengoli se preguntaba en 1644 si se obtiene un valor finito al sumar los cuadrados de los inversos de todos los números naturales, es decir, al calcular la suma infinita

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\frac{1}{100}+\frac{1}{121}+\frac{1}{144}+\frac{1}{169}+\frac{1}{196}+\frac{1}{225}+$$

Esta pregunta fue conocida como el *problema de Basilea*, ya que fueron matemáticos de esta ciudad suiza los que más intensamente se enfrentaron a ella. Entre ellos, a partir de 1689, varios miembros de la familia local de los matemáticos Bernoulli. Solo Leonhard Euler (1707-1783, también oriundo de Basilea), que en 1733 había sucedido a Daniel Bernoulli como catedrático de Matemáticas en San Petersburgo, logró presentar el resultado correcto en 1735 tras casi diez años de trabajo: la suma infinita existe y converge a un valor finito, $\pi^2/6$. Quien pregunte a varios matemáticos por la fórmula más bella en la que aparece el número π, obtendrá respuestas variadas, pero la solución de Euler al *problema de Basilea* será sin duda una de las mencionadas con mucha frecuencia.

Cabría pensar que una constante tan fundamental como el número π está investigada a fondo y es comprendida sin resquicios, pero no es ni mucho menos el caso. Ni lo será nunca, porque las matemáticas no son una construcción inmutable que se pueda dar por finalizada; la investigación continúa. También siguen surgiendo constantemente nuevas preguntas sobre el número π, algunas fáciles, pero otras difíciles o prácticamente irresolubles. La siguiente pregunta, por ejemplo, parece inofensiva, pero por el momento sigue sin tener solución: en la expresión decimal

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974

¿aparecen, por término medio, todas las cifras y combinaciones de cifras de una longitud determinada con la misma frecuencia? ¿Es imposible distinguir desde el punto de vista estadístico esta sucesión de números de una sucesión realmente aleatoria? Así lo creen los matemáticos.

Al fin y al cabo, el análisis del primer par de miles de millones de cifras no revela ninguna anomalía, como que el 8 aparezca demasiado a menudo o que la secuencia 123 lo haga muy raramente, o no lo haga nunca. También, por ejemplo, deberíamos poder encontrar en algún momento la secuencia 999999. Así sucede por primera vez en el *punto de Feynman*, que comienza en la cifra 762 después de la coma. Este nombre hace referencia al físico norteamericano Richard Feynman (*¿Está usted de broma, señor Feynman*?), quien en una ocasión expresó su voluntad de aprenderse de memoria tantas cifras del desarrollo decimal de π como fuesen necesarias para poder acabar con “nueve, nueve, nueve, nueve, nueve, nueve”. Creo que (con buena memoria y un entrenamiento adecuado) es posible incluso para el común de los mortales. De todas maneras, yo no lo he intentado en serio.

Algo así le resulta fácil a Daniel Tammet, el genial joven británico con autismo, que desde el sábado 13 de marzo de 2004 ostenta el récord de Europa[2] de memorización del número π: fue capaz de recitar 22 514 cifras sin cometer ningún error. Tammet explicó que veía las cifras en imágenes, colores y formas, y la sucesión de cifras como una sucesión de paisajes fascinantes. El punto de Richard Feynman es

[2] Una década después, el holandés Rick de Jong batió este récord al recitar 22 612 cifras de π en cinco horas y treinta y cuatro minutos. El récord mundial lo ostenta el indio Suresh Kumar Sharma, que declamó 70 030 cifras de pi en 17 horas y 14 minutos en 2015. [N. del T.].

para él “muy hermoso visualmente [...], una cuenca muy profunda y espesa de luz de color azul marino”, y π en su totalidad algo extremadamente bello y único. Como la Mona Lisa o una sinfonía de Mozart, el número π es en sí mismo una razón suficiente para amarlo.

De hecho, el número π tiene en realidad todas las características esenciales de una estrella del pop: todo el mundo cree conocerlo, pero nadie lo hace verdaderamente, y está rodeado de misterio. En Estados Unidos, el 14 de marzo (que allí se escribe como 3/14) se celebra a lo grande el Día de π. A mí me cae mejor el admirador secreto, como aquel fan de π al que canta Kate Bush en su álbum *Aerial*:

> *Hombre tierno, dulce y sensible,*
> *lleno de pasión y profunda fascinación*
> *por los números*
> *y absolutamente entregado al cálculo*
> *de π.*

Y en honor del cual la cantante procede a enumerar los 120 primeros decimales de π en el resto de la canción. Desgraciadamente, con errores y omisiones. Pero a ella se lo perdonamos.

## $\sqrt{-1}$. La mala reputación

¡A estas alturas ya hemos tenido que acostumbrarnos a muchas cosas! Los números naturales 1, 2, 3, ... impregnan desde el principio nuestro concepto de lo que son los números. Es necesario un mayor esfuerzo para familiarizarse con los números negativos, pero ya los hemos asimilado (excepto en nuestra cuenta bancaria). Nos hemos hecho una idea de qué son 2/3, quizá incluso de 19 centésimas (el IVA), operar con fracciones es cuestión de práctica y tampoco es algo imposible de evitar en el día a día. Los números decimales nos rodean por todas partes, aunque solo sea porque se usan para indicar los precios: un kilo de plátanos por 1,99 (o sea, en realidad, ¡2 euros!).

Nos parece un poco raro que cada mensaje SMS nos cueste 10,5 céntimos, pero entonces dos SMS son 21 céntimos o 0,21 euros. Pero ¿qué pasa cuando tenemos que pensar en un número cualquiera, así, en general? En ese momento ¿nos viene a la mente entonces el 3 o el 42, o los números 1,99, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ y $\pi = 3{,}14\,159\ldots$? ¿Desarrolla cada persona su propio concepto de número? ¿Los coloca poco a poco en la recta numérica, el cero quizá en el medio, los números positivos a la derecha, los números muy grandes muy a la derecha? Parece ser así: gracias a las modernas técnicas médicas, como la tomografía por resonancia magnética, se puede demostrar que trabajar con números grandes ¡activa las mismas áreas del cerebro que mirar a la derecha!

De todas formas, si los números son “las cosas con las que los matemáticos pueden calcular”, entonces existen muchos más números de los que solemos encontrarnos normalmente en el día a día, y muy distintos. Entre ellos, los *números complejos*, números como $4 + 2\sqrt{-1}$. No solo es perfectamente posible operar sistemáticamente y sin problemas con números así, sino que son indispensables para las matemáticas modernas: son sencillamente necesarios, por ejemplo para resolver ecuaciones (el *teorema fundamental del álgebra*, demostrado por Gauss en su tesis doctoral de 1799, es uno de los puntos culminantes al respecto), para descomponer ondas en armónicos (en matemáticas, se trata del *análisis de Fourier*) y para el desarrollo del álgebra y la teoría de números. Los números complejos también son absolutamente imprescindibles en muchas áreas de la física y la ingeniería.

Sin embargo, tienen muy mala reputación: el célebre matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) los denominó *números imaginarios* en el año 1637. Es un nombre que asusta, y desde entonces un aura de irrealidad y complejidad rodea a estos números. Actualmente, los llamamos *números complejos*, lo cual no es mucho mejor si tenemos en cuenta que, para abreviar, seguimos refiriéndonos a la raíz de –1 como *unidad imaginaria* $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. ¡Ojalá Descartes los hubiese llamado simplemente *números completos*, o hubiese elegido cualquier otro término más tangible!

Creo que la imagen pública de los números complejos jamás ha llegado a recuperarse del todo de aquella difamación cartesiana. Por culpa de su nombre, no son apropiados para el colegio, solo aptos para adultos. Es una lástima, ya que el análisis con números complejos de ondas, oscilaciones y vibraciones es un área fascinante de las matemáticas (y de la física y la música): ¡las matemáticas de la armonía! Pero se descubrió demasiado tarde que los números complejos pueden representarse elegantemente como puntos en el plano, lo hizo Caspar Wessel en 1799.

Hoy conocemos esta representación como el *plano complejo*, un plano infinito que la recta de los números “reales” divide en dos mitades, de la misma manera que una vía de tren corta en dos el paisaje. El que se limita a viajar en el tren que recorre los números reales sin mirar por la ventanilla a izquierda y derecha, donde, por ejemplo, se pueden admirar las dos raíces cuadradas de –1, no se entera demasiado de qué pasa en el mundo. ¿O acaso cuando está de viaje se conforma con mirar el interior del tren?

## $\aleph_0$. Al final de la recta numérica

Los filósofos llevan desde la Antigüedad ocupándose del infinito. Por el contrario, a la mayor parte de los matemáticos les parecía un despropósito y el primer intento serio de establecer términos matemáticos claros y sólidos al respecto hubo de enfrentarse a una gran oposición. Creo que también aquí nos dejamos intimidar demasiado por las cuestiones terminológicas.

El infinito no existe y, si lo hace, es un concepto completamente abstracto. Lo que sí existe, en cambio, son los conjuntos infinitos, y no nos plantean dificultades intelectuales ni espirituales. Así, hay infinitos números naturales,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, que nos podemos imaginar todos juntos formando un conjunto, el *conjunto de los números naturales*. Georg Cantor, nacido en 1845 en San Petersburgo, hijo de un corredor de bolsa, casado y padre de seis hijos, es considerado el fundador de la teoría de conjuntos, como ya hemos mencionado anteriormente. En ella no se trata en modo alguno de ensoñaciones abstractas. Al contrario, podemos aprender de Cantor a concretar las cosas. Porque, ¿cuándo son dos conjuntos infinitos iguales? ¡Exacto! Cuando podemos poner sus elementos en correspondencia uno a uno. Este argumento nos va a conducir a lugares insólitos como el *hotel de Hilbert*, pero sigue siendo totalmente válido.

El *hotel de Hilbert* lleva el nombre de su creador, David Hilbert (1862-1943), quien lo habría concebido para ilustrar las ideas de Cantor. Imagínese un hotel que no solo tiene muchas habitaciones, sino *infinitas* habitaciones. Los números de las habitaciones son los siguientes:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,

¿Que no es realista? ¡Claro que sí! No tiene más que pensar en uno de esos hoteles gigantes en cualquier capital europea, con sus pasillos infinitos llenos de puertas… Con mucha frecuencia, resulta imposible discernir si el pasillo se acaba en algún momento.

¿Cuántas habitaciones tiene este hotel? Para este número, Georg Cantor introdujo la notación $\aleph_0$ –que se lee como “álef cero” –. Álef es la primera letra del alfabeto hebreo[3].

Pero sigamos: si el hotel de Hilbert está lleno, con todas las habitaciones ocupadas y, sin embargo, llega otro cliente, el director del hotel (con un poco de imaginación) puede improvisar una solución trasladando al cliente de la habitación 1 a la habitación 2, al de la habitación 2 a la 3, y así sucesivamente –con lo cual queda libre la habitación 1–. Pero ¿qué pasa si a continuación llegan varios (o infinitos) clientes? Entonces, el director del hotel, que estudió matemáticas en la universidad, reorganiza de nuevo las habitaciones: el cliente de la habitación 1 debe mudarse a la habitación 2, el huésped de la habitación 2 se instala en la habitación 4, el de la habitación 3 debe irse a la 6, y así sucesivamente. De inmediato, todas las habitaciones con números impares quedan libres. ¿Qué hace el director del hotel (que tiene los nervios de acero) cuando de repente aparecen infinitos autobuses en el *parking*, cada uno de ellos con infinitos clientes a bordo? Pues algo se le ocurre. Seguro que a usted también.

Por lo demás, la cosa también funciona al revés. El hotel ya está lleno, pero la central exige aprovechar mejor los recursos, con un huésped en la habitación 1, dos huéspedes en la habitación 2, tres en la habitación 3, y así sucesivamente. También para este reto existe una solución muy concreta. Desde luego, siempre pasa algo en la recepción del *hotel de Hilbert*.

---

3 Que en español recibe el nombre de *alefato*. [N. del T.].

Las cosas se ponen realmente raras cuando se nos ocurre la estúpida idea de numerar las habitaciones con decimales, por ejemplo la habitación 0,42, la $\sqrt{5}$ o la $\pi$. El *argumento de la diagonal* de Cantor prueba que *no todos* los números reales pueden ser asignados a alguna puerta, porque hay más números reales que puertas (o sea, *números naturales*). Dicho de otra forma: es imposible enumerar los números reales. Esto es algo sorprendente, que altera decisivamente nuestra idea de conjunto infinito: ¡hay conjuntos infinitos de tamaños diferentes!

Hablar de conjuntos infinitos, y no de "el infinito", es una elección plenamente consciente. De "el infinito" no tengo ni idea, es un concepto *abstracto*, y las cosas abstractas es imposible imaginárselas. ¿O no?

> *[…] y Arthur tuvo súbitamente una idea bastante clara de lo que era el infinito. En realidad, no era el infinito.*
>
> *El infinito tiene un aspecto plano y sin interés. Si se mira al cielo nocturno, se atisba el infinito: la distancia es incomprensible y, por tanto, carece de sentido. La cámara en que emergió el aerodeslizador era cualquier cosa menos infinita; solo era extraordinariamente grande, tanto que daba una impresión mucho más aproximada del infinito que el mismo infinito.*

Les habla un experto: Arthur Dent, que como "autoestopista galáctico" exploró personalmente las infinitas extensiones del universo…