Demostraciones con encanto

Un viaje por las matemáticas elegantes

Claudi Alsina
Roger B. Nelsen

biblioteca ESTÍMULOS MATEMÁTICOS

Real Sociedad Matemática Española

sm

Demostraciones con encanto

Un viaje por las matemáticas elegantes

Claudi Alsina
Roger B. Nelsen

biblioteca ESTÍMULOS MATEMÁTICOS

Real Sociedad Matemática Española

sm

Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz
Diseño: Dirección de Arte Corporativa de SM
Corrección: Juana Jurado
Edición: Fernando Barbero

Revisión científica: Fernando Barbero y Luis Hernández Corbato
Editor General de la Real Sociedad Matemática Española: José Bonet
Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección: Luis Hernández Corbato

Comisión de la Real Sociedad Matemática Española:
Luis Hernández Corbato (UCM, Madrid)
Miguel Domínguez Vázquez (USC, Santiago de Compostela)
Javier Fresán Leal (École Polytechnique, Paris)
María Moreno Warleta (IES Alameda de Osuna, Madrid)
Óscar Rivero Salgado (Universitat Politècnica de Catalunya)
Juanjo Rué Perna (Universitat Politècnica de Catalunya)
Blanca Souto Rubio (Colegio Ágora, Madrid)

ISBN: 978-84-131-8779-2
Depósito legal: M-11391-2018
Impreso en España / *Printed in Spain*

Índice

Dedicado a nuestros numerosos estudiantes,
con la esperanza de que disfruten de la belleza de las matemáticas,
y a los que (quizá sin saberlo)
nos inspiraron para escribir este libro.

Prólogo

Tras haber percibido las conexiones, busca la demostración,
la revelación transparente
en su forma más simple, sin dudar de que aguardando
en el caos se encuentra la elegancia
singular, la estructura etérea y precisa, bien definida, de líneas
rápidas e indestructible.

Lillian Morrison, Poet as Mathematician

Los teoremas y sus demostraciones son el corazón de las matemáticas. Hablando de sus cualidades "puramente estéticas", G. H. Hardy escribió en su *Apología de un matemático* (Hardy, 1969) que en las demostraciones bellas "hay mucho de inesperado, inevitable y económico". Así serán las demostraciones con encanto que aparecerán en este libro.

Nuestra intención es presentar una colección de demostraciones notables en matemáticas elementales (sobre números, geometría, desigualdades, funciones, origami, teselaciones) de una elegancia excepcional, sucintas e ingeniosas. A través de razonamientos sorprendentes o potentes representaciones visuales, esperamos que las demostraciones de nuestra selección inviten a disfrutar a los lectores de la belleza de las matemáticas, a compartir sus descubrimientos con otros y a involucrarse en la creación de nuevas pruebas.

El gran matemático húngaro Paul Erdős (1913-1996) solía decir que Dios tiene un Libro interminable que contiene las mejores demostraciones posibles de todos los teoremas matemáticos, las más elegantes y perfectas. El mayor cumplido que Erdős podía hacer refiriéndose al trabajo de un colega era decir que "estaba sacado de El Libro". Erdős también señalaba: "No tienes que creer en Dios, pero debes creer en El Libro" (Hoffmann, 1998). En 1998, M. Aigner y G. Ziegler nos hicieron entrever algo de lo que El Libro debería contener cuando publicaron *Proofs from THE BOOK*, ahora en su quinta edición en inglés[1] (Aigner y Ziegler, 2014). Nosotros esperamos que *Demostraciones con encanto* complemente el trabajo de Aigner y Ziegler, al presentar pruebas que no requieren más que *cálculo*[2] y matemática discreta elemental.

Nos preguntamos ¿hay ilustraciones en El Libro? Creemos que la respuesta es afirmativa, así que encontraréis alrededor de trescientas figuras y diagramas en *Demostraciones con encanto*. Existe una larga tradición de usar dibujos en matemáticas para facilitar la comprensión de demostraciones. Esta tradición se remonta más de dos mil años hasta la antigua Grecia y China, y continúa hoy día con la popular etiqueta "demostraciones sin palabras", frecuente en las páginas de *Mathematics Magazine*, *The College Mathematical Journal* y otras publicaciones. Un gran número de ellas aparecen en (Nelsen, 1993 y 2000), ambos publicados por la Mathematical Association of America (MAA). También hemos escrito y publicado en la MAA dos libros (Alsina y Nelsen, 2006 y 2009) donde se discute el proceso de creación de pruebas visuales.

El presente libro está organizado como sigue: tras una corta introducción en la que se explican algunas ideas básicas sobre lo que son las demostraciones y el proceso de hallarlas o "crearlas", presentamos, en doce capítulos, una amplia y variada selección de algunas que, en nuestra opinión, "tienen encanto". Cada capítulo concluye con desafíos para los lectores, a quienes animamos a que busquen por sí mismos demostraciones interesantes. Hay alrededor de ciento treinta de estos desafíos.

Empezamos nuestro viaje con una selección de teoremas y demostraciones sobre enteros y algunos números reales escogidos. Pasamos entonces a discutir algunas cuestiones sobre geometría, comenzando por el estudio de configuraciones de puntos en el plano. Consideramos polígonos en general y también familias de triángulos, triángulos equiláteros, cuadriláteros y cuadrados. Luego, disertamos sobre curvas, en el plano y en el espacio, y continuamos con algunas aventuras en el mundo de los embaldosados y teselados del plano, resultados sobre coloraciones y algo de geometría tridimensional. Terminamos con una pequeña colección de teoremas, problemas y demostraciones en distintos campos de la matemática.

Al concluir los doce capítulos, damos nuestra solución a los retos planteados en el libro. Estamos seguros de que muchos lectores encontrarán soluciones y pruebas más elegantes, o con más encanto, que las nuestras. El libro concluye con las obligadas referencias bibliográficas y con un completo índice por palabras.

Como en nuestros libros anteriores publicados por la MAA, esperamos que tanto los profesores de secundaria, como los de bachillerato o de universidad utilicen en sus aulas algunas de estas "demostraciones con encanto" para hacer ver a sus estudiantes en qué consiste la elegancia matemática. Algunos podrán usar el libro como suplemento en un curso introductorio sobre demostraciones, razonamiento matemático o resolución de problemas.

---

[1] Publicado en español como *El libro de las demostraciones,* Nivola (2005). [N. del T.]

[2] Usaremos *cálculo* para referirnos al término inglés *calculus* (lo que en español denominamos *cálculo infinitesimal*). [N. del T.]

Agradecemos a Rosa Navarro su soberbio trabajo en la preparación de los primeros borradores de este manuscrito. Gracias también a Underwood Dudley y a los miembros del equipo editorial de *The Dolciani Mathematical Expositions* por su cuidadosa lectura del borrador del libro y sus numerosas y útiles sugerencias. Igualmente agradecemos a Elaine Pedreira, Beverly Ruedi, Rebecca Elmo y Don Albers, del equipo de edición de libros de la MAA, su pericia en la preparación de esta obra para su publicación.

Finalmente, damos las gracias a estudiantes, profesores y amigos en Argentina, Nueva Zelanda, España, Turquía y Estados Unidos por explorar con nosotros muchas de estas hermosas demostraciones y también por el entusiasmo que han mostrado por nuestro trabajo.

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona

Roger B. Nelsen
Lewis & Clark College
Portland, Oregón

Introducción

Los modelos matemáticos, como los de los pintores o los de los poetas, tienen que ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras, deben encajar de forma armoniosa. La Belleza es el primer requisito; no hay lugar en el mundo para unas matemáticas feas.

G. H. Hardy,
A Mathematician's Apology

Este es un libro sobre demostraciones que nos parecen singularmente atractivas, a las que llamaremos *demostraciones con encanto*. Aunque no se trate estrictamente de una definición, podemos decir que una demostración es un razonamiento que persigue convencer a los lectores de que una afirmación matemática es verdadera. Esperamos que, más allá del mero convencimiento, muchas de las demostraciones del libro les resulten también fascinantes.

Las demostraciones: el corazón de las matemáticas

Salvo por la forma en la que viene escrita, una demostración elegantemente construida es un poema

Morris Kline,
Mathematics in Western Culture

Como afirmamos en el prólogo, las demostraciones son el corazón de las matemáticas. Además de ser fundamentales para su desarrollo, nos proporcionan nuevas formas de razonamiento, y abren nuevas perspectivas para la comprensión de las profundas cuestiones que nos plantean. Como dijo Yuri Ivanovich Manin, "una buena demostración es aquella que nos hace más sabios", sentimiento repetido por Andrew Gleason al afirmar que "las demostraciones no están ahí para convencernos de que algo es cierto, sino para mostrarnos por qué es cierto". El sustantivo *prueba* y el verbo *probar* proceden del verbo latino *probare*, que significa 'examinar, juzgar'. El sustantivo tiene muchos otros significados, aparte del matemático, incluidos los de evidencia en el mundo del derecho, o las pruebas de impresión en grabado, fotografía, imprenta y numismática[3].

Demostraciones por todas partes

A finales de 2009, una búsqueda en internet de la palabra prueba daba como resultado unos veinticuatro millones de páginas web y unos cincuenta y seis millones de imágenes. Por supuesto, la mayoría de estas no se referían a demostraciones matemáticas, sino a pruebas farmacológicas, filosóficas, religiosas, legales, forenses, de impresión, etc. Recientemente varios libros, películas y obras de teatro han evocado esta palabra universal.

Aspectos estéticos de las demostraciones

Las mejores demostraciones en Matemáticas son cortas y concisas como epigramas.
Las más largas se cimbrean con ritmos parecidos a los de la música.

Scott Buchanan,
Poetry and Mathematics

¿Cuáles son las características de una demostración que nos llevan a decir que tiene encanto? En su delicioso ensayo titulado *Belleza y Verdad en las Matemáticas*, Doris Schattschneider (Schattschneider, 2006) responde así:

- La elegancia: es escueta y va directa a la idea esencial.
- El ingenio: contiene una idea novedosa, un giro sorprendente.
- La intuición: nos revela por qué el razonamiento es correcto, nos hace decir: "¡Ajá!".
- Sus nexos: iluminan una escena más amplia o conectan diversas áreas.
- El paradigma: da lugar a una heurística fructífera y de amplio ámbito de aplicación.

Pocos términos matemáticos acaparan tantos adjetivos como los que acompañan a la palabra *demostración*. Entre los positivos encontramos *bella*, *elegante*, *inteligente*, *profunda, breve*, *corta*, *clara*, *concisa*, *hábil*, *ingeniosa*, *brillante* y, naturalmente, *encantadora*. En la dirección opuesta, tenemos *oscura*, *incomprensible*, *larga*, *fea*, *difícil*, *compleja*, *extensa*, *no intuitiva*, *impenetrable*, *incoherente*, *tediosa*, etc.

[3] En inglés la palabra *proof* se usa también para referirse a la graduación de las bebidas alcohólicas destiladas. [N. del T.]

Un teorema, muchas demostraciones

> *Muchos trabajos de investigación buscan demostraciones nuevas de teoremas ya probados porque las que se conocen son poco atractivas. Hay demostraciones matemáticas que son convincentes a secas; otras encandilan y apelan directamente a nuestro intelecto, nos deleitan e inducen en nosotros el irreprimible deseo de decir* Amén, Amén.
>
> **Morris Kline,** *Mathematics in Western Culture*

La importancia de un teorema empuja a menudo a los matemáticos a buscar otras formas de demostrarlo. Aunque el enunciado no cambie, la existencia de una colección de pruebas diferentes puede contribuir a una mejor comprensión de un resultado o abrir nuevas vías de pensamiento sobre las ideas subyacentes.

El teorema de Pitágoras es, casi con certeza, el que cuenta con un mayor número de demostraciones diferentes. Entre 1896 y 1899, aparecieron en la *American Mathematical Monthly* doce artículos, que reunían exactamente cien pruebas, que fueron publicados agrupados bajo el título *Viejas y nuevas demostraciones del teorema de Pitágoras*. Basándose en esta colección y en otras, Elisha Scott Loomis escribió en 1907 *The Pythagorean Proposition*, que fue publicado en 1927. Una segunda edición de este libro, que contenía trescientas setenta demostraciones, apareció en 1940. Fue posteriormente reditado por el *National Council of Teachers of Mathematics* en 1968 (Loomis, 1968) y hoy continúa siendo un libro de referencia. Aparecen nuevas demostraciones (y algunas antiguas reaparecen) con cierta regularidad.

Una vez que se prueba un teorema, a menudo se publican nuevas demostraciones. La ley de Murphy aplicada a las matemáticas afirma que la primera demostración puede ser la peor. Las demostraciones nuevas abren el camino a argumentaciones más sencillas, hipótesis simplificadas o conclusiones más potentes. Cuando tenemos a nuestra disposición demostraciones de distintos tipos (algebraicas, combinatorias, geométricas, etc.) podemos llegar a nuevas interpretaciones de los resultados y encontrar conexiones enriquecedoras entre diferentes ramas de las matemáticas.

Algunas veces el propio autor de un teorema da distintas demostraciones de él. Por ejemplo, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicó en vida seis pruebas diferentes de la ley de reciprocidad cuadrática (que él llamó "teorema áureo") y, tras su muerte, se encontraron dos más entre sus papeles. Hoy día se conocen unas doscientas pruebas de este resultado. Otras veces el autor de un "teorema" puede publicar una demostración falsa o incompleta. Un caso extremo lo tenemos en Pierre de Fermat (1601-1665), que en una copia de la *Aritmética* de Diofanto de Alejandría escribió lo siguiente: "Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una potencia cuarta en dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias semejantes. He descubierto una maravillosa demostración de ello que, desgraciadamente, no cabe en este estrecho margen".

Q. E. D. o la losa

Q. E. D, la abreviatura de *quod erat demostrandum* ('lo que se quería probar') es la traducción latina de la expresión griega όπερ έδει δεîξαι (ΟΕΔ en forma abreviada), usada por Euclides y Arquímedes para señalar el fin de una demostración. Esta forma de marcar el final de una prueba se ha usado mucho en inglés. Su traducción a lenguas no latinas es también común: en francés tenemos C. Q. F. D. (*'ce qu'il fallait démontrer'*), en alemán w. z. b. w. (*'was zu beweisen war'*) y en español C. Q. D. ('como queríamos demostrar'). Con la llegada de los ordenadores y del software de escritura matemática, se ha hecho común el uso de un símbolo geométrico para indicar el fin de una demostración. Paul Halmos (1916-2006) introdujo la losa "■", que ahora compite con el \qed □ de TeX.

El rico mundo de la demostración

Un relámpago ilumina mi mente,
lo veo todo, tengo la demostración
y entonces me despierto.

Doris Schattschneider, *A Mathematical Haiku (after Dante)*

Es posible clasificar muchas demostraciones con arreglo a los métodos que se usan en ellas. Los tipos más frecuentes se enumeran en la lista —a la fuerza incompleta— que damos a continuación. Es importante tener en cuenta que en una demostración se combinan a menudo varios métodos:

- **Demostración directa:** usa definiciones, axiomas, identidades, desigualdades, lemas y teoremas probados previamente, etc., para mostrar que la conclusión se deduce lógicamente a partir de las hipótesis.
- **Demostración por contradicción:** (conocida también como "demostración por reducción al absurdo") muestra que es lógicamente imposible que el resultado sea falso. Se usa habitualmente asumiendo que lo que se quiere probar es falso y llegando a una contradicción.
- **Demostración del contrarrecíproco:** para probar una implicación del tipo "si A, entonces B", demostrar la implicación lógica equivalente "si no B, entonces no A".
- **Demostración por inducción matemática:** se trata de un método para probar que una propiedad de la forma $P(n)$ es cierta para todo entero positivo n. Se comienza mostrando que $P(1)$ se cumple y, acto seguido, que si $P(n)$ es verdad, entonces lo es $P(n+1)$.
- **Demostración por casos (o demostración exhaustiva):** se divide la hipótesis en un número finito k de casos, y se hace una demostración del resultado en cada uno de ellos. Las k demostraciones pueden ser directas, por contradicción o de otros tipos.

- **Demostración combinatoria:** es un método de demostración para identidades algebraicas entre números enteros positivos (los números de contar). Se basa en representar esos números mediante conjuntos de objetos y emplear uno de los dos principios siguientes:
  1. Contar los objetos de un conjunto de dos formas diferentes tiene que darnos el mismo resultado.
  2. Dos conjuntos que están en correspondencia, uno a uno, tienen el mismo número de elementos.

El primero se conoce como *principio de Fubini* por el teorema de Fubini del cálculo en varias variables, que trata sobre el cambio en el orden de integración en integrales iteradas. El segundo recibe el nombre de *principio de Cantor* porque fue empleado con profusión por George Cantor (1845-1918) en sus estudios sobre la cardinalidad de los conjuntos infinitos. Son también conocidos como el *método del doble recuento* y el *método de biyección*.

En muchos casos es posible ilustrar una demostración con una imagen explicativa que puede bastar para que los lectores capten su sentido directamente. Por ello consideramos también las *demostraciones visuales*, o *demostraciones sin palabras*, como técnica de demostración. Por ejemplo, es posible visualizar una demostración combinatoria mediante una representación del conjunto que va a ser contado de dos formas distintas o, asimismo, de una biyección entre dos conjuntos. Otras técnicas incluyen el uso de transformaciones geométricas tales como la reflexión y la rotación, el cambio de dimensión, *teselaciones* y coloraciones. Para saber más sobre técnicas para crear demostraciones visuales, recomendamos nuestro libro *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics* (Alsina y Nelsen, 2006).

Demostraciones en el aula

Las demostraciones son elementos esenciales de las asignaturas de matemáticas desde la escuela primaria y secundaria hasta la enseñanza superior. El *National Council of Teachers of Mathematics*[4] recomienda en su informe *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) que los programas de estudios de los cursos comprendidos entre la enseñanza infantil y el final de la enseñanza secundaria (alrededor de los dieciocho años) "deberían capacitar a todos los estudiantes para comprender que los razonamientos y demostraciones son un aspecto fundamental de las matemáticas".

En este informe, el *Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of the MAA* (CUPM, 2004) enumera una serie de objetivos para los estudiantes de Ciencias Matemáticas en universidades y centros de enseñanza superior. En concreto, se afirma lo siguiente: "La capacidad de entender y desarrollar demostraciones matemáticas es uno de los signos distintivos de la madurez matemática», y continúan diciendo que "hay que poner los cimientos de esta forma de pensamiento lógico en cada uno de los cursos en los que las matemáticas avanzadas desempeñen un papel importante, incluyendo el *cálculo* y la matemática discreta".

[4] Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos [N. del T.]

Pero las demostraciones no son solo para los estudiantes especializados en Matemáticas. El *Committee on the Undergraduate Program in Mathematics* (CUPM, 2001) también afirmaba que todos los estudiantes deberían llegar a apreciar la naturaleza de una demostración. Las demostraciones son lo que hacen especiales a las matemáticas". Por supuesto, el CUPM no recomienda cursos del tipo "teorema-demostración" para los estudiantes universitarios que no se vayan a especializar en matemáticas, pero sostiene que "los estudiantes deberían comprender la esencia de la cultura matemática: el valor y la necesidad de los razonamientos cuidadosos, las definiciones precisas y los argumentos concluyentes".

En un documento de trabajo para la *International Commission on Mathematical Instruction* (Hanna y De Villiers, 2008), Gila Hanna y Michel de Villiers escriben lo siguiente: "Dado que las demostraciones son el corazón de las matemáticas, es fundamental que tengan un papel más relevante en las aulas, para que así se mantenga la conexión entre las matemáticas escolares y las Matemáticas entendidas como disciplina". También apuntan que "[...] para los matemáticos, una demostración es mucho más que una sucesión de pasos correctos. Es, fundamentalmente, una concatenación de ideas e intuiciones cuyo objetivo es alcanzar la comprensión matemática: entender por qué una afirmación es cierta. Por tanto, el reto para los educadores es fomentar el uso de la prueba matemática como método para certificar no solo que algo es verdad, sino también por qué es verdad".

Este es el espíritu con el que hemos recopilado las demostraciones que presentamos en este libro. Esperamos que no solo os parezcan encantadoras, sino que os animéis a buscar en estas páginas demostraciones y desafíos para llevar al aula.