

Aritmética en familia

Un libro para mayores
sobre matemáticas
para niños

Ron Aharoni

b i b l i o t e c a
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



Real
Sociedad
Matemática
Española



Aritmética en familia

Un libro para mayores
sobre matemáticas
para niños

Ron Aharoni

b
i
b
l
i
o
t
e
c
a
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



*Real
Sociedad
Matemática
Española*



Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz
Diseño: Dirección de Arte Corporativa de SM
Corrección: Juana Jurado
Edición: Fernando Barbero

© Real Sociedad Matemática Española y Ediciones SM

Revisión científica: Fernando Barbero y Luis Hernández Corbato
Editor General de la Real Sociedad Matemática Española: José Bonet
Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección: Luis Hernández Corbato

Comisión de la Real Sociedad Matemática Española:

Luis Hernández Corbato (UCM, Madrid)
Miguel Domínguez Vázquez (USC, Santiago de Compostela)
Javier Fresán Leal (École Polytechnique, Paris)
María Moreno Warleta (IES Alameda de Osuna, Madrid)
Óscar Rivero Salgado (Universitat Politècnica de Catalunya)
Juanjo Rué Perna (Universitat Politècnica de Catalunya)
Blanca Souto Rubio (Colegio Ágora, Madrid)

Debido a la naturaleza dinámica de internet, SM no puede responsabilizarse por los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se remite en este libro.

ISBN: 978-84-131-8910-9
Depósito legal: M-25667-2020
Impreso en España / *Printed in Spain*

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org).

Índice

Prólogo de la presente edición	7
Prólogo de la edición original	11
Introducción	15
Parte I: Elementos	
Capítulo 1. Dilemas de reparto	21
Capítulo 2. Las tres formas de economía en matemáticas	25
Capítulo 3. El secreto de la belleza matemática	29
Capítulo 4. Capa sobre capa	33
Capítulo 5. Los números naturales	41
Capítulo 6. Significado y cálculo	45
Capítulo 7. El sistema decimal	51
Capítulo 8. ¿Qué aprendemos exactamente?	57
Parte II. El camino hacia la abstracción: principios didácticos	
Capítulo 9. Capacidad de abstracción: ¿cómo transmitirla?	65
Capítulo 10. Diversidad y fijación	67
Capítulo 11. ¿Por qué es difícil enseñar?	69
Capítulo 12. Mediación	73
Capítulo 13. Palabras mágicas	77
Capítulo 14. La calculadora y otros recursos de apoyo	81
Capítulo 15. El valor de la simplicidad	85
Parte III. Aritmética desde primero hasta sexto curso	
A. Significados	89
Capítulo 16. El significado de la suma	91
Capítulo 17. El significado de la resta	95
Capítulo 18. La esencia de la multiplicación	99
Capítulo 19. Los dos sentidos de la división	107
Capítulo 20. Problemas con enunciado	115

B. Cálculo	117
Capítulo 21. El cálculo de la suma	119
Capítulo 22. La resta: ¿préstamo o reorganización?	125
Capítulo 23. El cálculo de la multiplicación	129
Capítulo 24. ¿Memorizar o calcular de nuevo?.....	135
Capítulo 25. Las divisiones se empiezan por la izquierda.....	137
C. Fracciones	143
Capítulo 26. División y fracciones.....	145
Capítulo 27. Las fracciones convierten la división en multiplicación.....	153
Capítulo 28. Una conversación sobre la división por fracciones	161
Capítulo 29. Ejercicios resueltos de fracciones	165
Capítulo 30. El denominador común	167
Capítulo 31. El mínimo común denominador	173
Capítulo 32. Números mixtos	177
D. Decimales	181
Capítulo 33. Fracciones decimales	183
Capítulo 34. Cálculo con fracciones decimales	189
Capítulo 35. Porcentajes, un lenguaje universal para las fracciones	197
E. Razones y cocientes	201
Capítulo 36. Proporcionalidad	203
Capítulo 37. Más problemas de proporciones	209
Epílogo	213
Apéndice. Puntos de inflexión en la historia de la educación matemática moderna.....	215
Sobre el autor	221

Prólogo de la presente edición

Estimado lector no profesional de la enseñanza, si has cogido este libro por la segunda parte de su título, dale una oportunidad. Sí, es un libro de aritmética, pero también es un libro “para padres y madres”. El ejemplar que tienes en tus manos es un verdadero manual con el que poder acompañar a los más pequeños de la casa. Con este libro se revisitan las matemáticas que te enseñaron hace ya unos años, esas que puede que celebrases dejar de dar, esas que ahora le toca superar a ella o a él. Es un manual escrito en un lenguaje claro, muy transparente, con ejemplos muy accesibles. Mientras lo lees van a pasar muchas cosas: entenderás conceptos que entonces no te cuestionaste, y que superaste de alguna manera, podrás comprender, podrás disfrutar, ahora sí, sin la presión del examen. Contarás también con una ventaja añadida, como adulto tienes mayor capacidad de abstracción y madurez, tienes experiencia, algo que quien se enfrenta por primera vez a las matemáticas, no tiene. Leer este libro te podrá servir para comprenderle, para acompañarle, para echarle una mano, para que su experiencia no sea negativa, para romper ese círculo vicioso, para que no pase por lo que tal vez tú pasaste.

¿Por qué seguirán costando tanto esfuerzo las matemáticas escolares? ¿Por qué seguimos tropezando con esa piedra? Tal vez convenga decirlo aquí, el autor lo explicará en el texto más adelante: es porque son difíciles. Conviene aclarar en qué se fundamenta esta dificultad: las matemáticas son abstractas, sus conceptos no son concretos: las cifras, las decenas, las centenas, las llevadas... Pero no solo por la falta de concreción, también porque cada nuevo concepto se basa en los anteriores, no hay un borrón y cuenta nueva, cada tema nuevo necesita de los anteriores y es necesario que se interiorice correctamente antes de empezar el siguiente. Y por si esto no fuera ya suficiente, es preciso mecanizarlas, es preciso que cada nueva operación -ya que estamos hablando de aritmética- se repita lo suficiente para que no quede lugar a duda sobre su ejecución.

El último punto de la anterior enumeración, la mecanización, nos habla de una posibilidad que no debemos dejar de lado en el aprendizaje de las matemáticas, la posibilidad de aprender los procedimientos sin una comprensión profunda de lo que se está haciendo. Es ese aprendizaje procedimental da a veces a entender que el que aprende lo está hacien-

do bien cuando ejecuta bien los procedimientos. Pero ocurre en los últimos cursos que la dificultad aumenta y este acercamiento superficial se torna insuficiente. Llegan los sufrimientos, y la manía a las matemáticas y la necesidad de acabarlas cuanto antes. El círculo vicioso ha dado otra vuelta. No podemos permitirnos eso. Una correcta alfabetización matemática es fundamental para la formación de nuestros hijos, independientemente de lo que vayan a estudiar después. Se trata de entender el mundo. Decía Galileo que las reglas de la naturaleza están escritas en la lengua de las matemáticas, pero unos siglos después podemos afirmar que nuestro día a día depende del análisis de información -numérica o no-, de la resolución de problemas de todo tipo, de la elección del mejor camino, de la mejor estrategia, y sí, una buena parte de todo esto se consigue aprendiendo bien a hacer matemáticas.

He querido dedicar los primeros párrafos del prólogo al lector no profesional de la enseñanza. Quiero dirigirme ahora a otro posible lector: tú, maestra o maestro; de primaria, o de secundaria, que empiezas o que llevas años enseñando matemáticas. No sé cómo te habrás tomado mi afirmación de que las matemáticas son difíciles. No pretendía con ella excusarme, no podemos cobijarnos tras su dificultad, no podemos decir “esto es difícil, normal que se os dé mal”. Espero que no te haya molestado, mis disculpas si ha sido así. No sería la primera vez, he discutido con graduados en matemáticas, profesores de secundaria, bachillerato o universidad que me decían “las matemáticas, si se enseñan bien, son fáciles”. En este libro vas a encontrar argumentos que justifican mi afirmación, pero no solo, también vas a encontrar muy buenas pistas, muy buenas ideas para ayudarte en el proceso de acompañar a los estudiantes en este camino. Los maestros y profesores de matemáticas hemos llevado a muchos a odiar esto que tanto queremos. Hemos hecho creer a demasiados alumnos que no eran buenos en matemáticas. Es hora de que eso cambie, y tienes en tus manos una palanca para ayudarte en ese cambio. Si eres maestra o maestro de matemáticas cuenta también con las familias de tus alumnos, recoméndales este libro, invítalos a acompañar a sus pequeños en el camino que habéis emprendido, va a ser mejor para todos. Este libro es un manual muy recomendable también si eres estudiante de magisterio o de pedagogía, tendrás tiempo de aprender con tus alumnos y de tus alumnos, pero ahora, en tu etapa de formación, puedes aprender muchísimo también con este texto.

Además, para el profesional de la enseñanza de las matemáticas este libro es una oportunidad de seguir aprendiendo matemáticas, como le pasó al autor. La historia de Ron Aharoni es muy interesante, y debo reconocer que me identifiqué mucho con ella. Aharoni llevaba muchos años investigando en matemáticas y enseñando matemáticas *de mayores a mayores* cuando aceptó el reto de trabajar en un pequeño colegio de una pequeña ciudad de Israel. Nunca estuvo alejado de la enseñanza de los pequeños, ya que había impartido cursos de profundización y ampliación de matemáticas a alumnos de altas capacidades en edad escolar. Sin embargo, el profesor universitario entró en la escuela con mal pie, como él mismo reconoce, y sin esperar lo que le iba a pasar a continuación. No quiero hacer *spoilers* del libro que tienes en tus manos pero no te quiero dejar sin saberlo, el profesor aprendió, aprendió mucho, y no sólo aprendió sobre cómo enseñar matemáticas a pequeños, es que aprendió verdaderas matemáticas. Aharoni obtuvo, para su sorpresa, una imagen mucho más detallada de la materia que tanto quiere y disfruta. En la introducción de

este libro expresa cómo empezó con grupos de alumnos “mayores” de quinto o sexto curso para luego trabajar con alumnos de los primeros cursos. Fue curiosamente con los más pequeños con los que más aprendió. Yo siento que tuve una oportunidad parecida cuando me acerqué a mi hija que hablaba apasionada sobre lo que aprendía en la escuela infantil, fue su pasión la que me animó a visitar las matemáticas escolares para aprender muchas más sutilezas. Conozco más personas que han hecho ese proceso, y lo han disfrutado mucho, por eso, si eres profesor de matemáticas de mayores, este también es tu libro.

El sistema escolar israelí, en el que se enmarcan las experiencias y reflexiones recogidas en el libro, es muy semejante al nuestro. Las enseñanzas obligatorias van de los cinco a los quince años y la escuela primaria está dividida en seis cursos y está dirigida a alumnos entre los seis y los doce años. Como diferencia fundamental habría que decir que la mayor parte de las escuelas de Israel son de titularidad pública. Los primeros tres cursos están dedicados a los números naturales y sus operaciones -incluyendo entre estas operaciones la representación de los datos numéricos en gráficos y tablas- y la geometría. Las fracciones y los números decimales no aparecen antes del cuarto curso, algo común cuando se miran los currículos de matemáticas. Como ocurre en tantos otros países, los alumnos de Israel tienen también un “currículo espiral”, los alumnos pasan cada año por los mismos conceptos y operaciones ampliándose cada curso un poco a la vez que se profundiza sobre ellos. Los alumnos israelíes se someten a pruebas de nivel a partir del cuarto curso y tienen al terminar la etapa obligatoria una prueba de nivel, el *Bagrut*. Israel participa también en pruebas internacionales (PISA, programa internacional de evaluación de estudiantes, TIMSS, estudio de las tendencias en matemáticas y ciencias), obteniendo resultados en la mitad de la tabla de países, con alguna bajada en los últimos rankings internacionales, con la consiguiente preocupación de las autoridades educativas, otra característica que tenemos en común.

Aunque en el anterior párrafo se menciona la “profundización” lo cierto es que el currículo de matemáticas es demasiado extenso para que se pueda profundizar verdaderamente en él. El bloque de números -llamémosle cálculo, o aritmética- es demasiado extenso y su preeminencia sobre el resto de conceptos matemáticos que se pueden y deben tratar es tal que no es difícil encontrar la creencia de que las matemáticas escolares son eso, números y operaciones. Son muchas, y muy variadas, las voces de los que piden que se revise este currículum, que se acote su extensión para que se pueda profundizar más, que se planteen actividades más “ricas” y que se deje en manos de la tecnología las partes más tediosas de cálculo. Por poner un ejemplo, las divisiones en las que el divisor tiene más de dos cifras distintas de cero, que siguen presentes en los diversos currículos españoles, tanto en los oficiales como los que se acaban implementando por los docentes y que tienen que ver con sus creencias y con lo que viene escrito en el libro de texto. Liberarnos de esos contenidos no debería ser visto como “bajar el nivel”, al contrario, sería una oportunidad perfecta para subirlo. Es mucho más importante dar una buena estimación de una operación rápidamente que dar un resultado exacto después de varios minutos -por seguir centrados en el cálculo-. O, por poner otro ejemplo, es mucho más profundo y demuestra tener mucho más dominio de la materia ser capaz de inventar tres o cuatro problemas distintos que esa misma operación pueda resolver.

Querido lector: demasiadas veces he podido observar cómo en una biblioteca o librería alguien agarra un libro convocado por su título o por su portada, observa a continuación que es de matemáticas y lo suelta como si quemara, como si le obligase a revivir una experiencia negativa, algo que, lógicamente, no apetece. No sueltes este libro, no quema ni muerde, al contrario, da muy buenos consejos, y lo hace con un lenguaje muy cercano.

Si has llegado hasta aquí, y has leído este prólogo te invito a que pases la página, a que veas lo que te ofrece, y que lo disfrutes desde ya. No me quiero despedir sin mostrar mi agradecimiento a la Real Sociedad Matemática Española por haber incluido este volumen en su colección de Estímulos Matemáticos que publican junto a la editorial SM, han elegido muy bien.

Joseángel Murcia Carrión (@tocamates)

Profesor Asociado de la Facultad de Educación - Centro de Formación de Profesorado.

Universidad Complutense de Madrid. Asesor de Smartick.

Autor de “Y me llevo una: un ajuste de cuentas con las matemáticas escolares”.

Prólogo de la edición original

La mayoría de los adultos tienen muy enterrados sus recuerdos sobre la época en la que estudiaban matemáticas. La mayor parte de las veces lo único que quieren es olvidar ese trauma. Aceptan su añeja incapacidad para comprenderlas como algo tolerable aunque doloroso. Se consuelan pensando que, en realidad, no hacen falta para nada, hasta que un día surge la necesidad y reaparecen las viejas ansiedades, por ejemplo, cuando sus hijos empiezan a enfrentarse con las mismas experiencias que ellos sufrieron de pequeños.

Muchos querrían ayudar a sus hijos con sus problemas de aritmética, pero tienen miedo de encontrarse con aquella asignatura que les resultó tan difícil en su infancia. Sin embargo, no se dan cuenta de que, desde entonces, han ido adquiriendo muchas herramientas nuevas. Los adultos tienen más perseverancia, capacidad de abstracción, habilidad para procesar enunciados complejos y paciencia para adquirir una imagen completa. Todas estas habilidades son muy útiles para enfrentarse mejor y con más rapidez con los principios de las matemáticas de la enseñanza Primaria.

El propósito de este libro es proporcionar la orientación necesaria para ello. Ofrecer ayuda al padre o la madre que quieran participar activamente en el proceso de aprendizaje de sus hijos en lo que se refiera a la aritmética. De hecho, así fue como nació el libro. Los otros padres del colegio de mi hijo me pedían instrucciones por escrito para poder ayudar a los suyos con los deberes de matemáticas. Lo que empezó como unas modestas notas fue evolucionando poco a poco y acabó adoptando la estructura y el tamaño de un libro.

Los libros, como las ideas, tienen vida propia. A veces llevan ellos las riendas tanto como lo hace el propio autor. Así es como este libro fue cambiando gradualmente de forma. Una de las revelaciones que me iluminaron mientras daba clase en la escuela es que las matemáticas elementales no son nada fáciles. Además de ser bonitas, son profundas. Esta idea se fue abriendo lentamente camino en el libro y fue dándole otra dirección: una descripción de la belleza de las matemáticas básicas y, en consecuencia, de las matemáticas en general. Así, el público al que originariamente iba dirigido se amplió para incluir a los lectores que quieren repasar las matemáticas de su infancia desde una perspectiva dife-

rente. Para ellos, el libro ofrece una segunda oportunidad. A aquellos que aprendieron a multiplicar fracciones o a hacer divisiones, pero nunca entendieron por qué se hacen exactamente así, los invito a adoptar un nuevo punto de vista más maduro.

El libro va dirigido también a un tercer tipo de público, no menos importante para mí: los profesores y educadores. A ellos deseo enviarles un mensaje muy claro: la enseñanza correcta de las matemáticas depende más del dominio de los principios básicos que del empleo de estrategias didácticas. Hace falta familiaridad con la forma en que los finos estratos de la matemática se apoyan unos sobre otros. La mejor manera de enseñar matemáticas es a través de la experiencia directa y la familiaridad con los conceptos, sin intermedios.

La primera parte del libro, **Elementos**, describe los fundamentos de las matemáticas elementales desde el punto de vista de un maestro. Se ocupa de cuestiones sobre la naturaleza de las matemáticas, los conocimientos que se deberían enseñar en la escuela primaria, y en qué consiste la belleza de las matemáticas y su similitud con el arte.

Las familias que quieran ayudar a sus hijos necesitarán familiarizarse, no solo con las matemáticas, sino también con los **principios didácticos básicos**. A estos he dedicado la segunda parte del libro, que incluye las reglas fundamentales para progresar desde lo concreto hasta lo abstracto. Además, los padres y las madres también deberían estar al corriente de las tendencias educativas en las que se basa el proyecto docente del colegio de sus hijos e hijas. Por esta razón, el libro incluye un apéndice que describe en pocas palabras los avances más importantes de los últimos cincuenta años en la didáctica de la matemática.

La tercera parte del libro se ocupa de los **aspectos esenciales de las matemáticas básicas**, explorando, paso a paso y en detalle, los temas que se enseñan en Primaria. Aunque la geometría constituye alrededor del 20 % del programa de matemáticas en la enseñanza Primaria, decidí dejarla de lado y centrarme en la aritmética, es decir, en el estudio de las propiedades de los números. Aparte del papel central que tiene la aritmética en los planes de estudios, el motivo de mi elección es que se trata de un área de conocimiento uniforme y finamente acabada, como un diamante, que merece un libro íntegramente dedicado a ella.

Primera clase

Nunca tendrás una segunda oportunidad de causar una buena primera impresión.

(Refrán popular norteamericano).

En la educación, como en la vida, las primeras impresiones son importantes. La forma en que un tema se introduce por primera vez determinará en gran medida la futura actitud del alumno hacia él. ¿Se convertirá en un recuerdo agradable o desagradable? ¿Despertará una sensación de “lo entiendo” o de “qué difícil es esto”?

Por ese motivo, a lo largo del libro hay varios capítulos titulados “Primera clase”. En ellos se sugieren posibles formas de plantear un tema por primera vez. Nunca existe un único método para hacerlo, pero siempre es útil tener varias opciones. Las posibilidades que propongo están pensadas como consejos para profesores, pero también pueden ser útiles para padres y madres.

