

# La estructura de los números

Números primos  
para autodidactas  
adolescentes

Gregorio Morales Ordóñez

b i b l i o t e c a  
ESTÍMULOS MATEMÁTICOS



*Real  
Sociedad  
Matemática  
Española*



**Dirección del proyecto:** Adolfo Sillóniz

**Diseño de cubiertas:** Dirección de Arte Corporativa de SM

**Autor:** Gregorio Morales

© **Real Sociedad Matemática Española y SM**

**Revisión científica:** Fernando Barbero y Luis Corbato

**Editor General de la Real Sociedad Matemática Española:** Joaquín Pérez

**Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección:** Luis Hernández Corbato

**Comisión de la Real Sociedad Matemática Española:**

Luis Hernández Corbato (ICMAT, Madrid)

Miguel Domínguez Vázquez (ICMAT, Madrid)

Javier Fresán Leal (ETH, Zúrich)

María Moreno Warleta (IES Alameda de Osuna, Madrid)

María Pe Pereira (ICMAT, Universidad Complutense de Madrid)

Óscar Rivero Salgado (Universitat Politècnica de Catalunya)

Juanjo Rué Perna (Universitat Politècnica de Catalunya)

Blanca Souto Rubio (Colegio Ágora, Madrid)

Debido a la naturaleza dinámica de internet, SM no puede responsabilizarse por los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se remite en este libro.

**ISBN:** 978-84-139-2109-9

**Depósito legal:** M-4692-2021

Impreso en España / *Printed in Spain*


Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley.

Si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, [www.cedro.org](http://www.cedro.org)).





# Índice

Prólogo .....	7
Agradecimientos .....	9
Prefacio .....	11
<b>Parte I:  Problemas y curiosidades</b>	<b>15</b>
Capítulo 1. Operaciones básicas con SageMath .....	17
Capítulo 2. La estructura multiplicativa de los números .....	23
Capítulo 3. Indiana Jones en busca del rectángulo maldito .....	25
Capítulo 4. Pasatiempos .....	27
Capítulo 5. La criba de Eratóstenes .....	31
Capítulo 6. Cuadrados multiplicativos .....	33
Capítulo 7. ¿Qué forma tienen las tablas de multiplicar? .....	35
Capítulo 8. La factorización en números primos .....	39
Capítulo 9. Criterios de divisibilidad .....	45
Capítulo 10. Grafos de divisibilidad .....	51
Capítulo 11. Más factorización .....	57
Capítulo 12. El triángulo de Pascal .....	59
Capítulo 13. La letra del DNI .....	65
Capítulo 14. Cuadrados mágicos .....	67
Capítulo 15. El azar de los divisores .....	73
Capítulo 16. El factorial de un número .....	75
Capítulo 17. Algunos problemas .....	77
Capítulo 18. La criba parabólica .....	81
Capítulo 19. ¿Cómo saber si un número es primo? .....	85
Capítulo 20. ¿Cuántos números primos hay? .....	89
Capítulo 21. ¿En qué cifra acaban los números primos? .....	91
Capítulo 22. La función que cuenta primos .....	93

Capítulo 23. El primo más grande .....	97
Capítulo 24. Primos de Fermat .....	103
Capítulo 25. El sistema de numeración primario de Alan Bustany .....	107
Capítulo 26. Repitunos .....	109
Capítulo 27. La espiral de Sacks .....	111
Capítulo 28. Los divisores de un número .....	115
Capítulo 29. Proporcionalidad inversa .....	123
Capítulo 30. El máximo común divisor .....	125
Capítulo 31. El algoritmo de Euclides .....	129
Capítulo 32. Los diagramas de Hasse .....	133
Capítulo 33. Primos en progresión aritmética .....	135
Capítulo 34. ¿Cuánto suman los divisores de un número? .....	137
Capítulo 35. Números perfectos .....	141
Capítulo 36. Números amigos .....	145
Capítulo 37. Primos gemelos .....	147
Capítulo 38. Conjeturas ciertas, falsas y abiertas .....	149
Capítulo 39. Divisores pares e impares .....	157
Capítulo 40. Los múltiplos de un número .....	159
Capítulo 41. Problemas de múltiplos y divisores .....	167
Capítulo 42. Matemagia .....	171
Capítulo 43. La función $\phi$ de Euler .....	173
Capítulo 44. Cadenas de texto en SageMath .....	177
Capítulo 45. Cómo mantener un secreto .....	179
Capítulo 46. Análisis de frecuencias y cómo evitarlos .....	185
Capítulo 47. Encriptación RSA .....	191
Conclusión .....	197
<b>Parte II: 🕒 Pistas</b> .....	<b>199</b>
<b>Parte III: 💡 Ideas y soluciones</b> .....	<b>209</b>
<b>Parte IV: 📖 Bibliografía</b> .....	<b>273</b>
<b>Parte V: 📖 Índice alfabético</b> .....	<b>279</b>
Sobre el autor .....	285

# Prólogo

Olvida, desde ya, cualquier idea preconcebida sobre las matemáticas. No importa si cuando estudiabas las odiabas o te gustaban. De verdad, yo las he amado siempre y conocer a Gregorio me hizo apreciarlas a otro nivel. Recuerdo a la perfección el momento en el que el destino nos hizo coincidir. Esperaba nervioso en uno de los pasillos de la Universidad de Alicante para una entrevista para Profesor Asociado de Geometría en el Grado de Magisterio. Repasaba, nervioso, en mi cabeza cada cosa que me pudieran preguntar. Hasta que apareció él.

– Hola, soy Gregorio Morales, ¿tú también estás esperando para la entrevista?

Estupendo, me dije. Ya llegó la competencia. Y como si me conociera de toda la vida comenzó a hablarme sobre su visión de las matemáticas. Hablaba con tanta pasión y emoción de ellas que enseguida me hizo olvidar los nervios que tenía. Unos escasos minutos me bastaron para decirme: “tienen que seleccionarlo, no pueden dejar escapar a un profesor como él”. Por si os lo estáis preguntando, ambos fuimos seleccionados y, aunque en ese instante no lo pude predecir, desde entonces Gregorio se convertiría para mí en alguien muy importante, a nivel personal y profesional. Un año después de aquella entrevista me trasladaron al IES María Blasco donde, en ese momento, él trabajaba como profesor de secundaria y bachillerato. Durante aquel curso, aprovechábamos cada hueco de nuestro horario para compartir clases y, afortunadamente, pude disfrutar de esa esencia que desprende y que ha sabido plasmar en este libro. Nadie, en su sano juicio, habría desaprovechado la oportunidad que tuve de entrar a sus clases, compartir proyectos, ideas y genialidades. Es de entender que no me haya podido negar a escribir estas palabras, pese a la responsabilidad que implica.

Posiblemente, Gregorio termine odiándome por contar estas cosas, pero no puedo evitarlo. Compartir tiempo con él es siempre inspirador y divertido. Nunca pierde la oportunidad de atrapar con una anécdota o un problema matemático (de los de verdad, de los interesantes) y cuando crees que no puede sorprenderte más, descubres que es un genio de la papiroflexia (cuyas técnicas ha trasladado incluso a telas), que diseña juegos de mesa y estrategia, que es un referente en matemáticas manipulativas, un experto en  $\text{\LaTeX}$ , un perfeccionista de la ortografía o que siente pasión por los puzzles del tipo Rubik<sup>1</sup>. Para mí no es sólo un matemático, es un artista, un Da Vinci del siglo XXI.

---

<sup>1</sup>Lo de los cubos de Rubik creo que se le ha ido de las manos. Deberíais ver su colección de puzzles (cúbicos, tetraédricos, rombododecaédricos,...). Hasta se ha creado su propia guía de resolución en  $\text{\LaTeX}$  (cómo no) y un canal en Youtube (Gregorio Puzzles) donde analiza y explica diferentes tipos de juegos de ingenio.

Aquel año que compartimos centro fue para mí un auténtico regalo, una de las mejores experiencias profesionales de mi vida. ¿Por qué?, os preguntaréis. Pues porque Gregorio no es un profesor de matemáticas al uso. Para nada. Quien alguna vez lo ha escuchado hablar de matemáticas sabe perfectamente a lo que me refiero. Es capaz de atraparte con sutileza y sumergirte en la belleza de las matemáticas, para incitarte a querer saber más. Y no penséis que digo esto por estar escribiendo el prólogo de su primer libro. Es un teorema universal. Estoy convencido de que su visión sobre la educación matemática está influyendo en que muchos/as jóvenes quieran dedicarse en un futuro a la ciencia y las matemáticas. Es de los escasos profesores que muestra con sus clases la verdadera labor y el día a día de un matemático/a. En nuestra profesión no nos dedicamos a realizar cálculos o reproducir procedimientos descontextualizados hasta el infinito. Nos dedicamos a pensar. Se trata de tejer, con el hilo de la lógica y la aguja del ingenio, un entramado de ideas que conecten y permitan descubrir o construir verdades absolutas. En eso consiste hacer matemáticas, y así es como Gregorio las transmite. He podido apreciar de primera mano cómo impregna de curiosidad cada una de sus clases. Cómo mima cada detalle y, lo que es más importante, cómo permite al alumnado dedicar tiempo para pensar, razonar, compartir y unir ideas alrededor de las matemáticas.

Ahora bien, no solo hace esto con el objetivo de que aprendas. Cada actividad que inventa tiene ese sello suyo (único) que la hace especial, un sello que podréis encontrar en cada uno de los capítulos de este libro y que te acerca a las matemáticas de manera inolvidable. Sus propuestas siempre están cuidadas para guiarte con brillante sencillez hacia un propósito. Es capaz de crear expectativas llevándote de la mano a lo largo del problema, indagando en los primeros pasos hasta que siente que logras mantener el equilibrio; entonces, te suelta para que tú mismo seas capaz de alcanzar el éxito. Guía cada paso para que acabes en ese éxtasis intelectual que tanto amamos quienes hacemos matemáticas, esa explosión de satisfacción que abre tus ojos, tu mente e imprime de inmediato un aprendizaje inolvidable en tu cerebro. Y por eso a sus problemas los llamo cariñosamente problemas “removedores”.

No es de extrañar que, a día de hoy, (después de cambiarse de centro hace unos años) encuentre alumnos y alumnas en el IES María Blasco que me paran y me preguntan por él. Habría sido un error del destino no llegar a conocerlo. Habría sido un error que solo su alumnado (donde me incluyo) tengamos el privilegio de entender el alcance de las matemáticas. Y por ello me alegra tanto que se haya decidido a escribir este libro, porque con él está regalando al mundo un pedacito de su pasión, su conocimiento y esa preciosa forma de transmitir las matemáticas que te hará verlas y entenderlas como nunca antes lo habías hecho.

**Pedro Antonio Martínez Ortiz** (@maths4everything)

Doctor en Matemática Aplicada

Profesor de Matemáticas en el IES María Blasco (Sant Vicent del Raspeig)

Profesor Asociado del Dpto. de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante



# Agradecimientos

Este libro es fruto, en primer lugar, de una pasión por aprender que más tarde cristalizó en una pasión por enseñar. El gusto por aprender me fue inculcado desde muy pequeño por mis padres. Es a ellos a quien más quiero agradecerles todo lo que me han dado.

También quiero agradecer a José Ignacio Úbeda esos años de instituto, de universidad, y más allá, todas esas discusiones sobre matemáticas, sobre educación, y sobre tantas y tantas cosas. Eres como un hermano para mí.

Por supuesto, otro agradecimiento para Pedro Martínez, por todas esas charlas en la cafetería y por dejarme entrar en sus clases para aprender tanto de él.

Desde luego, este libro no existiría si no fuera por todos los alumnos que han disfrutado tanto como yo en mis laboratorios de matemáticas. He aprendido mucho con vosotros. No puedo nombraros a todos, pero no quiero perder la ocasión de dar las gracias a Raquel Reyes, Carlos Rodríguez, Raquel Gil, Ezequiel García, Iván Álvarez, Irene Torrado, Luis Gomis, Yaiza Mena, Alberto Navalón, Rocío Ondoño, Pepe Cuesta y Cristina Minguet por todas las horas que hemos pasado juntos.

No sería el profesor que soy sin la formación docente que recibí de Salvador Caballero, Paco Arévalo y José Antonio Mora. Gracias por todo lo que me enseñasteis a lo largo de esos años de formación y por la amistad que mantenemos desde entonces.

También quiero dar las gracias a Pedro Cerdán, por meterme el gusanillo de la teoría de números y las ecuaciones diofánticas, un hueco que me dejó la carrera y rellené gracias a él.

Muchísimas gracias también a quienes *sufrieron* las versiones preliminares del libro, aportando nuevos enfoques y puntos de vista y proponiendo muy buenas ideas. Gracias, José Ignacio Úbeda, Luis Moreno, Pedro Martínez y David Sánchez.

Los responsables de que este libro tenga la forma final que tiene son el personal de la Real Sociedad Matemática Española y la editorial SM que me han ayudado con correcciones y sugerencias. Sin duda, es gracias a sus correcciones matemáticas, y de estilo, que lo que yo quería contar en este libro se entienda tan bien. Si algún pasaje no se entiende del todo es, también sin duda, culpa mía.

Por último, gracias a Maria Josep por todas las horas que ha aguantado que yo estuviera delante del ordenador escribiendo actividades, rehaciendo párrafos una y otra vez, y maquetando el producto final. De no ser por este libro habría podido pasar más tiempo contigo. Gracias.



# Prefacio

Los números naturales, los que usamos para contar, son fascinantes. Aunque los aprendemos con uno o dos años, nunca dejamos de encontrar nuevas propiedades de ellos. De bien pequeños descubrimos la propiedad conmutativa de la suma; es decir, que  $3 + 5$  da lo mismo que  $5 + 3$ . Dentro de los números naturales, aprendemos algunas familias de números, como los pares y los impares; y descubrimos algunas cosas muy interesantes, como que la suma de dos números pares es siempre par y si sumamos un número par con otro impar siempre obtenemos un número impar. Aunque ahora nos parezca de lo más trivial, es algo asombroso.

Pero hay una familia de números que ha fascinado a la humanidad desde tiempos inmemoriales, nos sigue fascinando cuando los aprendemos en el colegio y aún hoy fascina a los matemáticos. Estoy hablando de los números primos.

Los números primos están rodeados de un aura de misterio. Buscamos patrones en su distribución pese a que parece bastante aleatoria. Y cuando se descubre un número primo muy muy grande, ¡hasta sale en las noticias!

Alrededor del siglo III antes de nuestra era, Euclides demostró que hay una cantidad infinita de números primos y dedujo el teorema fundamental de la aritmética: que cualquier número se puede poner de *manera única* como producto de números primos. En los siglos XVII y XVIII de nuestra era, grandes personalidades como Pierre de Fermat, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss y Sophie Germain hicieron grandísimos avances en la investigación de las propiedades de los números primos. En 1976, Whitfield Diffie y Martin Hellman crearon un protocolo de claves que permite a dos personas comunicarse de manera secreta (codificada) a través de un canal abierto (no seguro) sin establecer de antemano ningún secreto (como por ejemplo, las claves para descodificar la información). El protocolo se basa, cómo no, en los números primos. Diffie y Hellman recibieron el prestigioso premio A.M. Turing 2015 de la Association for Computer Machinery por este trabajo que “*revolucionó la seguridad informática*”. En 1979, Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman desarrollaron el sistema de encriptación RSA, que es el más usado hoy en día para codificar información y para firmar digitalmente. La seguridad de este sistema se basa en lo difícil que es (de momento) factorizar números muy grandes.

Como ves, los números primos son un tema muy actual. Si me acompañas en este viaje a través de las actividades y curiosidades históricas que te propondré descubrirás qué son los números primos y por qué es tan misteriosa la estructura de los números. Estoy seguro de que entonces compartirás esta fascinación. ¿Te vienes?

## ¿A quién va dirigido este libro?

Si has leído el título del libro (si no, ya tardas), habrás visto que está dirigido a *autodidactas adolescentes*. Para autodidactas porque este libro te hará trabajar por tu cuenta para ir descubriendo, poco a poco, los recovecos laberínticos que nos ofrecen los números primos. Y para adolescentes porque el punto de partida son los conocimientos que una persona tiene al acabar su educación primaria. El libro recorre todo el currículo de la educación secundaria (de 12 a 16 años) de manera paulatina, profundizando en algunos temas que, por cuestión de tiempo, no es posible dar en las clases de matemáticas utilizando un lenguaje apropiado para estas edades.

Sin embargo, no está dirigido únicamente a adolescentes. Si te intrigan las matemáticas y, en particular, los números primos, el material que encontrarás aquí te parecerá apasionante y te acercará al mundo actual de la investigación matemática y de la encriptación en internet.

Por último, este libro puede resultar muy útil para profesores de enseñanza secundaria que quieran utilizar una *metodología por descubrimiento*. Del material que aquí presento se pueden extraer secuencias didácticas para que los estudiantes descubran por ellos mismos los números primos, sus propiedades y cómo usarlos para resolver problemas (algunos sencillos, y otros más complicados). He usado esta metodología durante años en mis clases y, por un lado, ver la emoción que sienten los alumnos cuando hacen sus propios descubrimientos no tiene precio y, por otro, cuando dejas que los alumnos hagan sus investigaciones siguiendo sus propios caminos se aprende muchísimo de sus aportaciones. Este libro está lleno de los descubrimientos de mis alumnos (espero haberlos citados a todos y no dejarme ninguno).

Sea como sea, espero que disfrutes trabajando las actividades de este libro y leyendo las curiosidades históricas que aquí se encuentran.

## ¿Cómo se lee este libro?

Bueno, de momento lo que queda claro es que este libro no se lee de un tirón. Es imprescindible leerlo pausadamente, con lápiz y papel a mano, con tiempo para pensar en las actividades y resolverlas razonadamente. Algunas son lúdicas, otras son rutinarias, en otras te tienes que dar vueltas al coco, en otras deberás usar la calculadora o el ordenador; las hay de muchos tipos. Pero es imprescindible hacer todas las que se plantean.

Si alguna actividad se te resiste, puedes encontrar pistas en la segunda parte del libro, que comienza en la página 199 (las actividades con pista están marcadas con un icono especial). Cuando la hayas resuelto puedes comprobar la solución en la tercera parte del libro, a partir de la página 209, que contiene las soluciones a todas las actividades. Si alguna vez te rindes del todo (no le digas a nadie que esto te lo he dicho yo) puedes mirar la solución para entender cómo se hace y que eso te ayude con las siguientes. Pero aunque la hayas resuelto, te recomiendo encarecidamente mirar las pistas y la solución que propongo, porque casi siempre cuento estrategias y técnicas de resolución imprescindibles para avanzar en el libro.

Aparte de una libretita de trabajo donde hacer tus pruebas y anotar tus soluciones, te recomiendo tener otra para apuntar las técnicas y fórmulas que vayas descubriendo, ya que posiblemente te harán falta más adelante.

También en muchas actividades te enseñaré cómo usar el programa **SageMath**, que es un sistema algebraico computacional muy potente con el que podrás ver si tus soluciones son correctas y hacer pruebas rápidas para crear hipótesis y comprobarlas. Puedes descargarlo en [sagemath.org](http://sagemath.org), pero te recomiendo ir a [sagecell.sagemath.org](http://sagecell.sagemath.org), donde podrás usar el programa *on-line* desde el ordenador o el móvil cómodamente sin tener que descargar nada.

## Iconos en las actividades

Las actividades están marcadas con unos iconos que identifican de qué tipo son; algunas tienen, incluso, más de uno. Son los siguientes:



Estas actividades son de *Práctica*, bien de algo que se supone que ya deberías saber antes de leer este libro, o bien de algo que acabas de aprender aquí. En cualquier caso, te toca coger lápiz y papel y ponerte a trabajar. Al fin y al cabo, es con la práctica como se llega a interiorizar lo aprendido.



Para estas actividades, si no te salen, te puedo dar una *Pista*. Me podrías enviar un wasap, pero como sería un engorro te he escrito las pistas en la segunda parte del libro.



Para estas actividades necesitarás *Material manipulativo*, ya sean cubitos, dados, piezas de Lego, etc. En cada actividad se especifica el material necesario, que normalmente tendrás por casa.



En estas actividades se usa el *Lenguaje algebraico*, ese en el que se usan letras para designar números que desconocemos. Puede que no estés muy acostumbrado a usar el lenguaje matemático y estas actividades te cuesten al principio. Poco a poco, te irá costando menos.



Estas actividades ocultan *Ideas*, gemas preciosas escondidas, ideas importantes aunque la actividad te parezca sencilla. Al hacerlas tienes que tener los ojos (y la mente) bien alerta a la búsqueda de esas interesantes ideas escondidas. En las pistas y en las soluciones las encontrarás si no has dado con ellas por tu cuenta.



Estas actividades son un poco *Difíciles* y seguramente necesitarás meditarlas un poco, probar estrategias e ideas hasta que descubras la solución.



Para estas actividades necesitarás un *Ordenador* o el móvil. En la mayoría de los casos también una conexión a internet.



Si no quieres escribir en el libro, podrás *Descargar* las actividades marcadas con este icono de la página web de la Real Sociedad Matemática Española, en [www.rsme.es](http://www.rsme.es)

---