Breve historia de los números

El pensamiento matemático a lo largo del tiempo

Leo Corry

biblioteca
ESTÍMULOS **MATEMÁTICOS**

Real
Sociedad
Matemática
Española

sm

Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz
Diseño de cubiertas: Dirección de Arte Corporativa de SM
Autor: Leo Corry

Revisión científica: Fernando Barbero, Alberto Espuny y Roberto Muñoz
Estilo de LATEX: Gregorio Morales
Editor General de la Real Sociedad Matemática Española: Joaquín Pérez
Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la colección: Luis Hernández Corbato
Traducción: Laura Cánovas i Hidalgo y Alberto Espuny Díaz

ISBN: 978-84-1392-224-9
Depósito legal: M-20258-2021

Impreso en España / *Printed in Spain*

Índice

Prefacio 7

Capítulo 1. El sistema numérico: un resumen 11

1.1 De los números naturales a los números reales 13
1.2 Los números imaginarios 19
1.3 Polinomios y números trascendentes 20
1.4 Cardinales y ordinales 23

Capítulo 2. La escritura de los números: ayer y hoy 25

2.1 La escritura moderna de los números: el sistema decimal posicional 25
2.2 La escritura de los números en la Antigüedad: Egipto, Babilonia y Grecia 30

Capítulo 3. Números y magnitudes en la tradición matemática griega 37

3.1 Los números pitagóricos 38
3.2 Razones y proporciones 40
3.3 Inconmensurabilidad 44
3.4 La teoría de las proporciones de Eudoxo 47
3.5 Los números fraccionarios griegos 50
3.6 Comparaciones, no mediciones 51
3.7 Longitud unidad 54
Apéndice 3.1 La inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$: demostraciones antiguas y modernas 56
Apéndice 3.2 La teoría de proporciones de Eudoxo en acción 59
Apéndice 3.3 Euclides y el área del círculo 63

Capítulo 4. Problemas de construcción y problemas numéricos en la tradición matemática griega 67

4.1 Los libros aritméticos de los Elementos 67
4.2 ¿Álgebra geométrica? 69
4.3 Regla y compás 71
4.4 Los problemas numéricos de Diofanto 74
4.5 Los recíprocos y las fracciones de Diofanto 80
4.6 Más de tres dimensiones 82
Apéndice 4.1 La solución de Diofanto al Problema V.9 de la Arithmetica 85

Capítulo 5. Los números en la tradición del islam medieval 87

5.1 La ciencia islámica desde la perspectiva histórica 87
5.2 Los problemas numéricos con cuadrados de al-Khwārizmī 90
5.3 Geometría y certeza 93
5.4 Al-jabr wa'l-muqābala 96
5.5 Al-Khwārizmī, los números y las fracciones 98
5.6 Los números de Abū Kāmil en la encrucijada de dos tradiciones 100

5.7 Números, fracciones y métodos simbólicos ... 104
5.8 Al-Khayyām y los problemas numéricos con cubos ... 108
5.9 Gersónides y los problemas con números ... 112
Apéndice 5.1 Resolución de la ecuación cuadrática ... 115
Apéndice 5.2 La ecuación cúbica. La solución geométrica de al-Khayyām ... 116

Capítulo 6. Los números en Europa del siglo XII al siglo XVI ... 119
6.1 Fibonacci y los números indo-árabes en Europa ... 121
6.2 Las tradiciones del ábaco y el Coss en Europa ... 122
6.3 El Gran arte del álgebra de Cardano ... 130
6.4 Bombelli y las raíces de los números negativos ... 137
6.5 Los Elementos de Euclides en el Renacimiento ... 139
Apéndice 6.1 La prueba del nueve ... 141

Capítulo 7. Números y ecuaciones al comienzo de la revolución científica ... 145
7.1 Viète y el nuevo arte del análisis ... 146
7.2 Stevin y las fracciones decimales ... 152
7.3 Los logaritmos y el sistema decimal de numeración ... 155
Apéndice 7.1 La construcción de las tablas de logaritmos de Napier ... 158

Capítulo 8. Los números y las ecuaciones en la obra de Descartes, Newton y sus contemporáneos ... 161
8.1 El nuevo planteamiento de Descartes sobre los números y las ecuaciones ... 161
8.2 Wallis y la primacía del álgebra ... 167
8.3 Barrow y la oposición a la primacía del álgebra ... 172
8.4 La Aritmética universal de Newton ... 174
Apéndice 8.1 La solución geométrica de Descartes para la ecuación cuadrática ... 179
Apéndice 8.2 Entre la geometría y el álgebra en el siglo XVII: el caso de los Elementos de Euclides ... 181

Capítulo 9. Nuevas definiciones de los números complejos a principios del siglo XIX ... 189
9.1 Números y razones: dejando de lado a la metafísica ... 189
9.2 Euler, Gauss y la omnipresencia de los números complejos ... 191
9.3 Interpretaciones geométricas de los números complejos ... 193
9.4 La definición formal de Hamilton de los números complejos ... 196
9.5 Más allá de los números complejos ... 198
9.6 El descubrimiento de los cuaterniones de Hamilton ... 200

Capítulo 10. ¿Qué son y para qué sirven los números? Los números a finales del siglo XIX ... 203
10.1 ¿Qué son los números? ... 203
10.2 Los números ideales de Kummer ... 204
10.3 Cuerpos de números algebraicos ... 207
10.4 ¿Qué deberían ser los números? ... 209
10.5 Los números y los fundamentos del cálculo infinitesimal ... 212
10.6 Continuidad y números irracionales ... 215
Apéndice 10.1 La teoría de las proporciones de Eudoxo y la teoría de cortes de Dedekind ... 220
Apéndice 10.2 El TVI y el teorema fundamental del cálculo ... 222

Capítulo 11. Definiciones rigurosas para los números naturales: Dedekind, Peano y Frege ... 225
11.1 El principio de Inducción matemática ... 226
11.2 Los postulados de Peano ... 227
11.3 Las cadenas de números naturales de Dedekind ... 232
11.4 La definición de Frege de los números cardinales ... 234
Apéndice 11.1 El principio de Inducción y los postulados de Peano ... 236

Capítulo 12. Los números, los conjuntos y el infinito: un logro conceptual en el umbral del siglo XX 239
12.1 Dedekind, Cantor y el infinito 240
12.2 Infinitos de distintos tamaños 243
12.3 Los ordinales transfinitos de Cantor 249
12.4 Problemas en el paraíso 252
Apéndice 12.1 El conjunto de números algebraicos es numerable 258
Capítulo 13. Epílogo: los números en perspectiva histórica 261
Referencias y sugerencias de lectura 265
Índice de Autores 273
Índice alfabético 279

Prefacio

Este libro cuenta la historia del desarrollo del concepto de número desde los tiempos de los pitagóricos hasta principios del siglo XX, momento en el que las concepciones predominantes alcanzaron su estado actual con toda su complejidad (o quizá deberíamos decir con toda su simplicidad). Este no es el primer libro que cuenta una historia similar o, más específicamente, que cuenta una historia sobre este tema. Aun así, creo que se diferencia esencialmente de los que ya existen, tanto en contenido como en estilo. Desde luego, difiere en el alcance y en el tipo de material histórico en el que se basa.

En aras de ser breve, y dado el carácter algo informal del libro, el relato histórico que presento será, por necesidad, selectivo. No he intentado ser exhaustivo ni completamente imparcial a la hora de contar esta historia. He tenido que hacer elecciones —a mi juicio apropiadas— por lo que respecta al alcance y los objetivos que he perseguido. Creo que el relato es lo suficientemente completo y representativo como para dar una visión precisa del desarrollo del concepto de número. Espero que los lectores también encuentren mis elecciones justificadas, coherentes y esclarecedoras.

La historia que cuento aquí se centra principalmente en los desarrollos relacionados con las matemáticas europeas (incluyendo la antigua Grecia). También hay un capítulo relativamente largo sobre las contribuciones del islam medieval. Por cuestiones de espacio, he dejado de lado culturas matemáticas enteras como las del lejano oriente (China, India, Japón, Corea) y Latinoamérica, cada una de las cuales alcanzó logros significativos propios y dio lugar a diversas concepciones según sus particulares idiosincrasias.

Este es un libro sobre el desarrollo histórico de ideas científicas importantes. Por supuesto, estas ideas las crearon y diseminaron personas reales que vivieron y trabajaron en circunstancias históricas concretas. Presto algo de atención a esas vidas y circunstancias, pero solo para que nos ayuden a entender las ideas en su contexto apropiado. Por consiguiente, no aparecen en mi relato ni duelos heroicos al anochecer ni trágicos casos de suicidio por no conseguir resolver un determinado problema. No es que tales anécdotas carezcan de interés, pero he pensado que la dinámica intrínseca de las ideas es lo suficientemente dramática para garantizar la atención continua del lector.

A la hora de escribir los distintos capítulos, he intentado reflejar el conocimiento histórico más reciente, actualizado y relevante, junto con las mejores aportaciones académicas clásicas. Este no es un texto monográfico apoyado en investigación histórica original que persiga ser citado por otros historiadores. Se trata más bien de una síntesis que intenta dar una visión amplia de lo que los historiadores han escrito y dirigir a los lectores potenciales hacia sus trabajos. No pretendo haber reflejado todos los puntos de vista existentes sobre todos los temas, ni tampoco todas las interpretaciones históricas discrepantes, y en ocasiones opuestas, que los historiadores han sugerido para los distintos episodios que relato. Por otra parte, y dado el estilo del libro, no quiero fatigar al lector con un enfoque estrictamente académico a la hora de presentar y justificar cada una de las afirmaciones que aparecen en él: solo hago referencias directas a textos que se citan como párrafos enteros, o que desarrollan con más detalle asuntos que yo menciono de paso y que, por razones de espacio, aparecen solo como observaciones breves. Aun así, al final del libro doy una lista bastante detallada de referencias, organizada más o menos en consonancia con los capítulos del libro, que los lectores podrán utilizar para profundizar en su lectura. Esta es mi manera de citar de forma explícita las obras en las que me he apoyado directamente para investigar sobre los distintos asuntos que discuto aquí, así como de reconocer la deuda intelectual que he contraído con cada uno de sus autores. Los lectores interesados en ampliar el alcance de mi relato encontrarán en esos textos gran cantidad de interesante material adicional. Estos proporcionan también referencias directas a las fuentes primarias, que dan apoyo a las afirmaciones históricas que presento aquí. De hecho, considerando las limitaciones de espacio, excepto cuando he citado directamente, no he incluido fuentes primarias en la lista bibliográfica, dando por supuesto que los lectores interesados podrán encontrar información detallada tanto en las fuentes secundarias o colecciones citadas como haciendo búsquedas en Internet.

El prototipo de lector que he tenido en mente a la hora de escribir este libro es un estudiante de grado en matemáticas. Mientras se esfuerza por desarrollar habilidades técnicas complejas en las asignaturas que está estudiando, un libro como este le puede ayudar a entender mejor, desde una perspectiva diferente de la que puede encontrar en los textos ordinarios y en las clases, las ideas con las que se está familiarizando poco a poco. Creo que su aprendizaje puede ganar en profundidad y riqueza leyendo un libro como este. Un segundo tipo de lector que he tenido en consideración es el profesor de matemáticas. Creo que este libro puede contribuir a sus esfuerzos por llevar al aula una visión más amplia de su propia disciplina, enfocada en los largos procesos históricos que han contribuido a darle forma.

También he tratado de escribir de un modo que me permita llegar a una audiencia más amplia, que incluiría a estudiantes de enseñanza secundaria con curiosidad intelectual e inclinación por las matemáticas; matemáticos profesionales, científicos, ingenieros, y otros lectores cultos. Por eso, he tratado de lograr un equilibrio entre las cuestiones técnicas concretas y los aspectos históricos más generales. En este sentido, hay pequeñas diferencias entre los distintos capítulos. Algunos son más exigentes a nivel técnico, mientras que otros son más fáciles. Sin embargo, en todos ellos me he esforzado al máximo por escribir de una forma concisa que pueda estar al alcance de lectores con distintos niveles de preparación y despertar su interés.

Aun así, no he intentado llegar a todos los lectores posibles. Mientras escribía, he pensado a menudo en una frase famosa de Stephen Hawking que aparece en el prefacio de su *Breve historia del tiempo* (en la que me he inspirado descaradamente para dar título a mi propio libro). Dijo que había seguido el consejo de su editor de que no debía incluir demasiadas fórmulas en su libro, ya que cada una reducía el número de lectores potenciales a la mitad. Hawking siguió su consejo sabiamente e incluyó tan solo una, la inevitable $E = mc^2$. En retrospectiva, este fue un buen consejo, ya que el libro se convirtió en un *best-seller* sin precedentes y se tradujo a un gran número de idiomas.

Solo puedo desear para mi libro un éxito similar, pero tengo que confesar que he tenido que incluir más de una fórmula. De hecho, el lector encontrará muchas fórmulas y figuras, aunque, en general, no son particularmente complicadas. Creo que quienquiera que se haya sentido atraído por el tema del libro no se desalentará al verlas. Simplemente, no podía dejarlas fuera de mi relato si quería hablar seriamente sobre la historia de los números. Aun así, en lugares donde he pensado que algunos lectores querrían ver detalles técnicos más profundos, mientras que otros podrían encontrar en ellos un impedimento, los he relegado a apéndices separados de sus respectivos capítulos. Es posible saltarse estos apéndices sin miedo a perder la continuidad de la lectura del texto principal, pero sugiero encarecidamente al lector que no lo haga y dedique el esfuerzo necesario allí donde haga falta. Creo que tal esfuerzo será recompensado. En algunos puntos he dado demostraciones detalladas o explicaciones técnicas en el texto principal porque pienso que serán de interés para la mayoría de los lectores y que son necesarias para lograr la imagen completa de lo que intento transmitir.

Varios amigos y colegas han sido tan amables de leer partes del libro y ofrecerme sus comentarios críticos. Me han ayudado en gran medida a mejorar su contenido, estructura y estilo. Doy las gracias de corazón a: Alain Bernard, Sonja Brentjes, Jean Christianidis, Michael Fried, Veronica Gavagna, Jeremy Gray, Niccolò Guicciardini, Albrecht Heeffer, Victor Katz, Jeffrey Oaks y Roy Wagner. También agradezco los sabios consejos de tres revisores anónimos.

Es un placer agradecer su ayuda y apoyo editorial a Keith Mansfield y su equipo de la OUP (Clare Charles y Daniel Taber). Mi sincero agradecimiento a Mac Clarke por su estupendo trabajo como editor de mi texto. Así mismo, quiero dar las gracias a Kaarkuzhali Gunasekaran y su equipo en Integra Software Services por su profesionalidad a la hora de maquetar el libro.

Quiero expresar un agradecimiento especial a mi amigo Lior Segev por haberme enseñado los aspectos básicos de LaTeX. No sé cómo pero, hasta ahora, me las había arreglado sin esta herramienta básica de edición de textos matemáticos. En retrospectiva, estoy muy contento de haber aprendido con su ayuda.

Siempre me alegra reconocer el apoyo continuo y amigable de Barbara y Bertram Cohn como orgulloso titular de la Cátedra de Historia y Filosofía de las Ciencias Exactas de la Universidad de Tel Aviv que lleva su nombre.

Finalmente, quiero dar las gracias a mi querida familia por su apoyo incondicional y por su confianza ciega en que, haga lo que haga, seguro que es importante y digno de encomio. Como siempre, he hecho todo lo posible por estar a la altura de sus expectativas.

Universidad de Tel Aviv, mayo de 2015

Leo Corry

Capítulo 1
El sistema numérico: un resumen

Matemáticas e historia, historia y matemáticas. Es difícil pensar en dos campos del conocimiento más diferentes entre sí —hay quien diría que incluso opuestos— tanto en su esencia como en sus aspectos prácticos.

El conocimiento matemático se ocupa de forma primordial de verdades *ciertas, necesarias y universales*. Las afirmaciones matemáticas verdaderas no dependen de consideraciones contextuales, ni temporales ni geográficas. En general se considera que las verdades matemáticas están fuera de toda discusión o interpretación.

La disciplina de la historia, por el contrario, se enfrenta a lo *particular*, lo *contingente* y lo *idiosincrático*. Trabaja con acontecimientos que pasaron en un lugar concreto y en un momento concreto, y que sucedieron de un cierto modo. Pero que podrían haber ocurrido de otra forma. Las afirmaciones históricas son siempre parciales y debatibles y están abiertas a la interpretación. Las discusiones que plantean los historiadores cambian con el tiempo. "Pensar históricamente" y "pensar matemáticamente" son claramente dos cosas distintas.

Pero si con "pensar históricamente" sobre cualquier tema nos referimos a algo más que establecer una cronología de los hechos, entonces surge la interesante cuestión de si podemos pensar históricamente sobre la forma en que la gente ha "pensado matemáticamente" a lo largo del tiempo y sobre los procesos de cambio que han afectado a estas maneras de pensar. Si las matemáticas afirman verdades universales, ¿cómo podemos hablar de las matemáticas desde una perspectiva histórica (aparte de establecer una cronología de los descubrimientos)? ¿Qué es lo que evoluciona con el tiempo en una disciplina que es, aparentemente, eterna?

De esto va precisamente este libro: haremos un breve repaso histórico (no solo cronológico) sobre cómo se ha ido pensando sobre los números en circunstancias históricas cambiantes. No solamente *qué* se sabía sobre los números sino también, y sobre todo, *cómo* se sabía y qué se pensaba *sobre* lo que se sabía. Las preguntas que iremos planteando incluirán las siguientes:

- ¿Cuáles fueron los conceptos básicos alrededor de los cuales se edificó el conocimiento sobre los números y sus propiedades en los diferentes contextos históricos?
- ¿Qué pasó para que estos conceptos cambiaran con el tiempo?
- ¿Cuáles fueron los principales problemas matemáticos que requirieron, en un contexto histórico particular, el uso de números de varios tipos?
- ¿Cómo se escribían los números en las distintas culturas, y cómo las distintas notaciones matemáticas favorecieron o dificultaron el desarrollo de conceptos relacionados con los números y con las técnicas de cálculo?

- ¿Cuál fue la relación, en las distintas culturas matemáticas, entre la aritmética y otras disciplinas cercanas (principalmente la geometría), y cuáles fueron las concepciones filosóficas de los matemáticos que se dedicaron a la aritmética?
- ¿Cómo motivaron (o desmotivaron) las consideraciones prácticas la adopción de ciertas ideas relacionadas con los números?
- ¿Qué papel jugaron las instituciones de conocimiento que surgieron en las distintas culturas a la hora de promover o impedir el desarrollo de concepciones particulares sobre los números?

Los números son importantes en nuestro mundo. El mundo que nos rodea está lleno de números. Los números aparecen de forma rutinaria y frecuente, no solo en contextos científicos y tecnológicos, sino también en las noticias, el comercio y muchos aspectos de nuestras vidas privadas. La lengua vernácula de las ciencias naturales —y en particular de la física— es el lenguaje matemático, en cuyo corazón se encuentran los números. También en las ciencias sociales —en la economía y las ciencias políticas sobre todo— el lenguaje de los números es fundamental tanto desde el punto de vista teórico como en el trabajo empírico. En la vida pública, los números no son solo importantes como herramienta explicativa, sino que también son un medio necesario para la administración y el control. Las principales herramientas usadas hoy en día en los sistemas burocráticos de todo el mundo se basan en el procesamiento de datos y en el análisis (a veces manipulador) de números. El papel central de los ordenadores en todos los aspectos de la vida enfatiza y hace todavía más manifiesta la verdad de estos hechos básicos.

Los números están presentes en tantos aspectos de nuestro día a día que damos por sentada su presencia, pero esta situación no es de ninguna manera una ley inevitable de la naturaleza. Más bien es el resultado de un proceso histórico muy específico, largo, enrevesado y que se desarrolló en múltiples niveles. Un punto de inflexión muy importante se produjo en el siglo XVII, en el contexto de la que se conoce como la “revolución científica”. Los descubrimientos que tuvieron lugar en esta época en disciplinas como la mecánica las convirtió en auténticas ramas de la matemática, en contraste con la tradición aristotélica que había dominado la vida intelectual en Europa desde la época escolástica tardía, en el siglo XIV. Antes del siglo XVII el modelo ideal de explicación para los fenómenos naturales no favorecía la búsqueda de leyes formuladas matemáticamente, (de hecho, a veces se oponía activamente a ello). Durante los siglos XVIII y XIX, los números fueron adquiriendo de forma paulatina un papel central en las ciencias naturales, así como en otros aspectos del conocimiento y de la vida cotidiana.

Los historiadores, y de hecho otros muchos estudiosos, son conscientes de la relevancia de estas transformaciones que afectaron al *papel* de los números en la sociedad y se han ocupado de ellas con diferentes grados de detalle. Lo que no se percibe tan fácilmente a primera vista, y ha escapado a la percepción general, es que incluso la propia idea de *lo que son los números* y cómo se usan *en matemáticas* ha estado en el foco de un restringido, pero no menos largo y complejo proceso de debate, evolución y modificación continua. Este libro se ocupa de ese proceso, que ha sido históricamente importante, aunque se haya desarrollado de forma sutil y haya pasado más bien inadvertido dentro de las concepciones generalmente aceptadas sobre el desarrollo de la ciencia.

Evidentemente, cualquiera que piense sobre ello se dará cuenta de que todo nuestro conocimiento actual sobre los números y sus propiedades se logró gracias al esfuerzo de generaciones de matemáticos que dedicaron a ello una enorme cantidad de energía intelectual. Pero, más que en cualquier otra área de conocimiento, este proceso tiende a ser concebido como algo más bien lineal y directo. El papel del historiador parece reducirse al de un mero cronista cuya principal tarea es establecer quién hizo qué por primera vez, y cuándo.

Se supone que el proceso que ha llevado a nuestras actuales concepciones sobre los números y sus propiedades ha sido simple, poco problemático desde una perspectiva histórica y con poco lugar para las sorpresas, excepto, quizá, por lo que respecta a fechas y nombres. La idea de un verdadero *proceso histórico* —donde individuos y grupos se enfrentan a dilemas y tienen que escoger entre distintas alternativas; donde a veces se siguen durante largos periodos de tiempo rutas equivocadas o desvíos que conducen a callejones sin salida; donde dos partes igualmente versadas en el tema defienden visiones contrarias— parece para muchos algo ajeno al desarrollo de las matemáticas y, en particular, al de las ideas sobre los números.

Pretendo mostrar que la historia de los números es una historia llena de intriga que se desarrolló en distintos niveles, de manera sorprendentemente no lineal, con movimientos inesperados, callejones sin salida y también, por supuesto, ideas muy ingeniosas y éxitos trascendentales. El final de la historia es la creación de un mundo de números exquisitamente concebido, que cristalizó con la llegada del siglo XX. Desde entonces se han añadido algunas ideas nuevas y se han afinado otras ya conocidas, pero nuestra concepción básica del sistema de números y de cómo está construido se alcanzó básicamente en esa época, tras siglos de descubrimientos importantes acompañados de dudas, malentendidos e incertidumbres.

Para que la exposición sea más clara y efectiva, he decidido comenzar con un capítulo introductorio de carácter técnico y no histórico. En él pretendo ofrecer una visión general del sistema de números tal y como lo entendemos hoy en día. Esto incluye una descripción de los distintos tipos de números y las relaciones entre ellos, las maneras aceptadas de escribirlos y las hipótesis subyacentes. También he incluido algunos resultados muy básicos sobre los números. Aunque algunos lectores quizá estén familiarizados con la materia discutida en este capítulo, es conveniente establecer un lenguaje básico común antes de abordar el relato histórico al que está dedicado este libro.

1.1 De los números naturales a los números reales

La sistemática concepción del mundo de los números que tenemos hoy en día se basa en una jerarquía, construida cuidadosamente y de complejidad creciente, de varias clases de números, que empieza con los números naturales y va añadiendo nuevos tipos de forma sucesiva —negativos, racionales, irracionales— hasta llegar a los números reales. Esta perspectiva no se alcanzó hasta principios del siglo XX. Si consideramos periodos anteriores, como el que va del siglo XVII al siglo XIX, en que se produjo un gran progreso científico en Europa, particularmente en matemáticas y en física matemática, puede parecer sorprendente que el concepto de número fuese todavía algo confuso y mal fundamentado. Es muy notable que, sin embargo, esto no entorpeciera sustancialmente el enorme progreso que tuvo lugar en todas aquellas disciplinas donde las matemáticas jugaban un papel central.

Este es un fenómeno histórico no trivial que merece en sí mismo nuestra atención. En efecto, existe una separación interesante —sobre la que no siempre se insiste lo suficiente— entre la errática evolución histórica de las ideas matemáticas y su ulterior presentación en los libros de texto como parte de un conocimiento claro y perfectamente estructurado. Normalmente la imagen que adquieren los estudiantes universitarios de matemáticas sobre muchas materias, por ejemplo el cálculo infinitesimal, es transparente, amplia y está bien organizada. Cada paso en la presentación gradual del contenido parece surgir de forma natural e inevitable a partir de los anteriores. Por contra, desde la perspectiva histórica, estas ideas evolucionaron de una forma mucho más caótica, desordenada e imprevisible. De hecho, a veces evolucionaron en un orden casi exactamente opuesto al que de forma retrospectiva seguimos para presentarlas.

Por ejemplo, en el caso del cálculo infinitesimal, el concepto de límite, que normalmente se enseña en las primeras clases de cualquier curso de análisis, surgió en realidad a principios del siglo XIX, momento en el que muchas de las técnicas básicas del cálculo diferencial e integral y de resolución de ecuaciones diferenciales ya habían sido desarrolladas. Para poder dar una definición formal de límite bien elaborada, fue necesario llegar a una idea mucho más clara de los fundamentos y la estructura básica del sistema de los números reales que no se alcanzó hasta finales del siglo XIX. Para ello hizo falta profundizar en el concepto de conjunto, que empezó a desarrollarse también en esta época y no se entendió bien hasta la primera década del siglo XX.

De las ideas relacionadas con el concepto de número, la más básica es la idea de contar, que asociamos con los números *naturales*, a saber, los que aparecen en la sucesión $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Este es el punto de partida de la aritmética tanto en el sentido *cognitivo* (es decir, la manera en la que un niño empieza a aprender los números) como en el sentido *histórico* (es decir, el conocimiento aritmético, en cualquier cultura, empieza con el conocimiento de los números naturales). Esta coincidencia puede parecer un hecho obvio, pero está lejos de serlo. Tal como hemos mencionado, estas dos líneas de desarrollo —cognitivo e histórico— normalmente difieren, especialmente cuando nos referimos a los aspectos más avanzados de las matemáticas. Veremos muchos ejemplos importantes de esto a lo largo del libro, pero aquí, en la base de la aritmética, prácticamente coinciden.

Es costumbre denotar la colección de números naturales con la letra $\mathbb{N}$, así que:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Una cuestión importante que se plantea inmediatamente en relación con los números naturales es el papel especial concedido a los números primos. Un número primo se define habitualmente como aquel número natural que solo tiene dos divisores: él mismo y el número 1 (que, por convenio, no se considera normalmente como número primo). Estos números atrajeron especial atención desde muy pronto y continúan estando hoy en día en el foco de la investigación matemática más avanzada.

Los números primos son los bloques básicos del sistema de los números naturales por una razón muy clara y precisa: cada número natural se puede escribir como un producto de números primos *de forma única* (salvo por el orden de los factores). El número 15, por ejemplo, es el producto de dos primos, $15 = 3 \times 5$, y esta es la única manera de escribirlo como producto. Lo mismo pasa con otro ejemplo: $13500 = 2^2 \times 3^3 \times 5^3$. De nuevo, no hay otra manera de escribir este número como producto de factores primos. Esta propiedad del sistema de los números naturales proporciona una herramienta poderosa para demostrar otros muchos teoremas de la teoría de números. Por su importancia, los matemáticos acostumbran a llamarlo “el Teorema fundamental de la aritmética”.

Otro resultado interesante sobre los números primos es que hay un número infinito de ellos. Esto ya lo sabían los matemáticos de la Antigua Grecia (hablaremos de esto más adelante), pero hay que remarcar que el resultado no es, ni mucho menos, obvio. En efecto, como los números naturales aparecen como productos de todo tipo de números primos y sus potencias, se podría llegar a pensar que con un número finito de estos (quizá muy grande) bastaría para generar *todos* los números naturales mediante combinaciones diferentes y tomando potencias cada vez mayores. Como veremos, no es este el caso.

Empezando por la idea de número natural, podemos extender el concepto de número de forma sistemática y, por tanto, introducir tipos adicionales que sirven para resolver distintas clases de ecuaciones algebraicas. La primera extensión la conforman los números *negativos*, que son necesarios si queremos resolver una ecuación tan simple como $x + 8 = 4$. Necesitamos encontrar un número que sumado con 8 nos dé como resultado 4. Si acabáramos de aterrizar en el planeta Tierra sin ningún conocimiento previo de aritmética y tan solo supiéramos calcular con números naturales, nuestra reacción inmediata al ver la ecuación sería decir que no tiene solución. Como sabemos por experiencia, esto es lo que se enseña a los alumnos de los primeros cursos de primaria. Cuando se les pide que resten ocho de cuatro, la respuesta que esperamos recibir es que es imposible o que no hay solución.

Considerándolo desde la perspectiva histórica, la posibilidad de resolver una ecuación cuya solución es un número negativo tardó mucho en aceptarse como algo razonable o legítimo. Hablaremos extensamente sobre esto, pero aquí quiero empezar en la dirección opuesta y simplemente afirmar, o postular, que -4 es "ese número que resuelve la ecuación $x + 8 = 4$". Ni siquiera me cuestiono la legitimidad de postular su existencia. Los números negativos son simplemente aquellos que, sumados a un número dado cualquiera, dan otro número que es más pequeño que el de partida. Esta no es una buena definición matemática, veremos una mejor más adelante, pero por ahora nos ayuda a expandir nuestro arsenal. El conjunto de los números naturales positivos y negativos, todos juntos, recibe el nombre de conjunto de *números enteros* o, simplemente, "enteros". Este conjunto se denota normalmente con la letra $\mathbb{Z}$, así que:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Obsérvese que, sin haberlo mencionado hasta ahora, el número 0 ha aparecido de repente. Este número tiene una historia interesante por sí mismo, de la que una parte aparecerá posteriormente en el libro. De momento podemos definirlo, por analogía con la definición anterior de los números negativos, como aquel número que es solución de la ecuación $x + 4 = 4$ o como el número que sumado a cualquier otro lo deja igual.

Podemos seguir expandiendo el arsenal de números necesarios (¿o posibles?) con la ayuda de ecuaciones que no se pueden resolver con enteros. Consideremos, por ejemplo, la ecuación $3x + 2 = 4$. Aquí necesitamos encontrar un número que cuando lo multipliquemos por 3 nos dé 2 (para que cuando sumemos el resultado a 2 nos dé 4). Obviamente, ninguno de los enteros que hemos visto hasta ahora nos servirá porque, por ejemplo, $1 \times 3 = 3$, que ya es mayor que 2. De nuevo, podemos darnos por vencidos y afirmar que "no hay respuesta" o, de forma alternativa, afirmar que cualquier ecuación de este tipo tiene que tener una solución, en este caso la fracción $\frac{2}{3}$, que cumple la condición buscada, ya que $3 \times \frac{2}{3} + 2 = 4$.

Podemos por tanto definir una fracción simplemente como el cociente de dos enteros. Más adelante daremos una definición más satisfactoria desde el punto de vista matemático. Los dos enteros que aparecen en el cociente que define la fracción pueden ser ambos del mismo signo (positivo o negativo), resultando en una fracción positiva, o pueden ser de signos opuestos, en cuyo caso la fracción es negativa. Por supuesto, un entero puede ser visto como una fracción en la que el entero se divide por 1. Por el contrario, no se aceptan como legítimas las fracciones en las que un número se divide por 0. El conjunto de todas las fracciones da lugar a los denominados números racionales que denotamos habitualmente con la letra $\mathbb{Q}$, así tenemos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \text{los números de la forma } \frac{p}{q}, \text{con } p \text{ y } q \text{ enteros y } q \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Las fracciones que acabamos de presentar son las "fracciones ordinarias" $\frac{p}{q}$ pero, como es sabido, se pueden escribir igualmente como "fracciones decimales", por ejemplo, $0,5 = \frac{1}{2}$. Aquí nos encontramos con otro relato interesante con raíces históricas que discutiremos en los próximos capítulos: ¿cómo surgió esta identificación no trivial entre fracciones y decimales?

Vayamos a otra clase de números que es necesaria para resolver una ecuación como $x^2 = 2$. Ahora necesitamos encontrar un número que, multiplicado por sí mismo, dé 2. Observemos que, a primera vista, no hay una razón aparente para suponer que esta ecuación no se pueda resolver solo con la ayuda de los números racionales. Empezamos con la observación de que $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$. Por tanto, bajo la hipótesis razonable de que existe una buena correspondencia entre las operaciones aritméticas con números racionales y su orden (esta no es una hipótesis gratuita, pero no podemos probarla aquí), llegamos fácilmente a la conclusión de que la solución de la ecuación $x^2 = 2$ debe ser un número entre 1 y 2. Hasta aquí no hay razón para esperar que no nos vaya a servir ningún número racional. Si multiplicamos, por ejemplo, $1{,}5$ por sí mismo, obtenemos $2{,}25$, que es mayor que 2. Continuando con este proceso de aproximación, podemos probar con un número más pequeño, como $1{,}4$. Multiplicado por sí mismo da $1{,}96$, algo menor que 2. Entonces probamos con uno mayor, por ejemplo $1{,}41$ $(1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}9881)$ y continuamos aproximándonos gradualmente a un número cuyo cuadrado sea 2 (a veces por arriba, a veces por abajo): $1; 2;\ 1{,}5;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}42;\ 1{,}414$, y así sucesivamente. Por supuesto, podemos escribir esta misma sucesión como una secuencia de fracciones ordinarias, no decimales: $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{141}{100}, \frac{71}{50}, \frac{707}{500}, \ldots$

Quizá esta manera de buscar el número deseado sea pesada, pero hasta este momento no hay ninguna razón para pensar que no acabaremos encontrando el valor exacto de un número racional que multiplicado por sí mismo dé 2. Este es el número que llamamos "la raíz cuadrada de 2", y que escribimos como $\sqrt{2}$. Pero resulta que, en un momento dado de la historia, alguien se dio cuenta de que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2. En el capítulo 3 veremos cómo se llegó a esta conclusión —casi una revelación— y en qué términos se formuló; aquí solo quiero destacar, sin ninguna intención de exagerar, que este descubrimiento representa uno de los momentos más trascendentales de la historia de los números; ya veremos por qué.

Vemos así que para poder resolver la ecuación $x^2 = 2$ necesitamos considerar la posible existencia de un número que no se puede representar como fracción. Como en circunstancias similares, postulamos su existencia, le damos un nombre, $\sqrt{2}$, y lo definimos como aquel número que multiplicado por sí mismo da 2. Además, introducimos los números irracionales que definimos como aquellos que no se pueden escribir como fracciones. Entre estos números irracionales los hay que son simplemente raíces de otros números, como la raíz cuadrada de 97, $\sqrt{97}$, y también combinaciones más complicadas, como $\sqrt[3]{2\sqrt{97}} - \frac{5}{3} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{52}}$. Nótese, por cierto, que su irracionalidad no se debe a que aparezcan raíces en su representación escrita: por ejemplo $\sqrt{4}$ —que es el número 2— es obviamente racional, como también lo es $\sqrt{\frac{9}{25}}$, que es el número racional $\frac{3}{5}$. En cada caso concreto tenemos que averiguar si las raíces se pueden escribir como fracciones o no.

Un hecho quizá más interesante es que no todos los números irracionales son raíces de números racionales o combinaciones de ellas. Hay también números irracionales de un tipo muy distinto, algunos de ellos bien conocidos, como es el caso de π. No hay ningún símbolo de uso habitual para representar de forma separada al conjunto de números irracionales, pero el sistema de números que incluye tanto los números racionales como los irracionales se conoce como el sistema de números *reales* y se denota habitualmente con la letra $\mathbb{R}$.

Nótese que los números naturales también son enteros, los enteros también son racionales y los racionales también son reales. Esta importante jerarquía de los tipos de números se puede representar como un diagrama como el que se muestra en la figura 1.1.

Hasta ahora he presentado varios sistemas numéricos suponiendo, sin más, que si un tipo de números es necesario para poder resolver ciertas ecuaciones, esto ya justifica que los aceptemos como entidades matemáticas legítimas. Esta ha sido la actitud habitual en matemáticas desde principios del siglo XX. El único requisito que se impone sobre las nuevas entidades matemáticas que se definen de esta manera es que no pueden dar lugar a ninguna contradicción lógica con las estructuras matemáticas ya existentes que tomemos como punto de partida para nuestro estudio. He presentado los sucesivos sistemas numéricos sin comprobar realmente si alguna de las extensiones nos lleva a contradicciones con los previamente existentes, pero, como veremos más adelante, es posible hacerlo.

De todos modos, es importante destacar que este enfoque tan liberal que nos permite conceder la "ciudadanía" matemática legítima a cualquier idea que surja de nuestra mente, con la única condición de que no entre en contradicción con el cuerpo matemático existente, es por sí misma el resultado de un proceso histórico complejo e interesante que merece la debida atención. En etapas históricas precedentes hubo intensos debates entre matemáticos sobre si esta actitud tenía algún tipo de sentido y si era conveniente o sensato desde un punto de vista filosófico hablar de números negativos o irracionales.

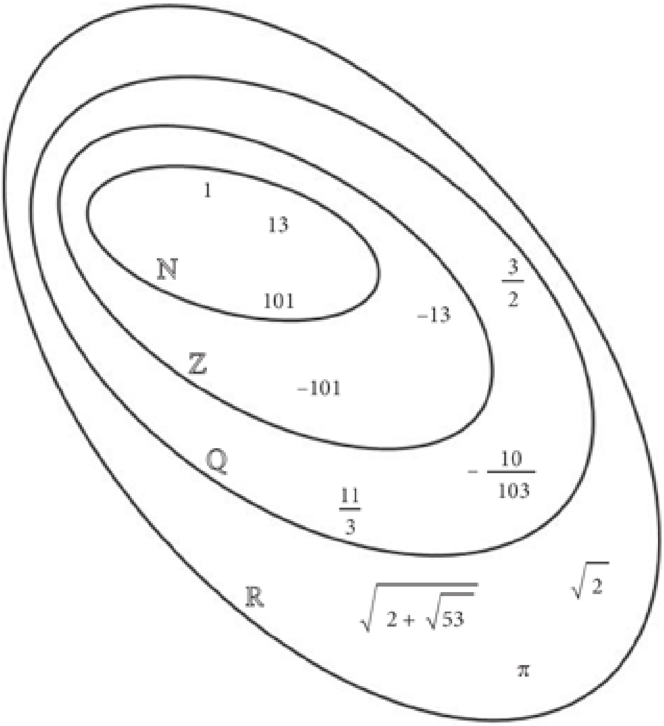

Figura 1.1 Los distintos sistemas de números: desde los naturales a los reales.

Las ideas sobre la naturaleza de los números están íntimamente conectadas con las formas de representarlos. Una cuestión importante es cómo utilizar símbolos para este fin. En nuestra cultura, la representación simbólica típica de los números utiliza la notación decimal, sobre cuyo desarrollo histórico tendremos mucho que decir. Pero otro aspecto importante de la representación numérica es de tipo gráfico o pictórico. Para nosotros, la forma habitual de hacerlo es con la ayuda de una línea recta, como la de la figura 1.2.

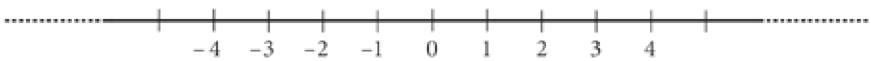

Figura 1.2 Representación gráfica de los números sobre una recta.

Los números aparecen aquí repartidos a lo largo de dicha recta, con los positivos creciendo indefinidamente hacia la derecha, y los negativos decreciendo indefinidamente hacia la izquierda de forma análoga. Sobre esta misma línea se representan no solo los enteros sino todos los reales, como se muestra en la figura 1.3.

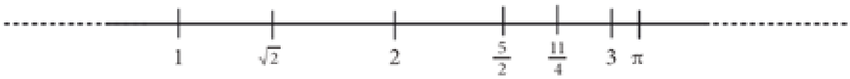

Figura 1.3 Representación gráfica de los números racionales y reales en una recta.

El principio en el que se basa esta representación es que a cada número real le corresponde un único punto de la línea recta y viceversa. Esta idea tan importante, no hace falta decirlo, también tiene una historia interesante por sí misma. Una propiedad destacable de los números racionales que también se refleja en este tipo representación es que, dados dos números racionales cualesquiera, siempre hay otro número racional entre ellos. Si tenemos, por ejemplo, dos fracciones cercanas $\frac{137}{101}$ y $\frac{138}{101}$, podemos tomar el número $\frac{1375}{1010}$, que es su media aritmética y, por tanto, se encuentra a mitad de camino entre ellas. También se puede ver esto fácilmente usando decimales porque así queda bien claro el orden entre los tres números: $1{,}35643564\cdots$, $1{,}36138613\cdots$, $1{,}36633663\cdots$ Se muestra esto gráficamente, en la figura 1.4.

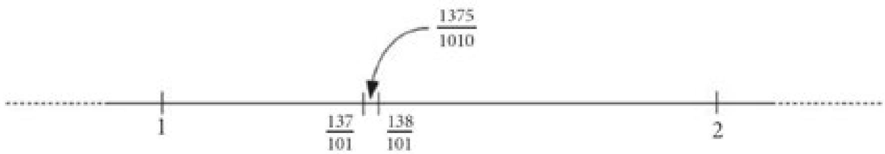

Figura 1.4 Números racionales densamente distribuidos sobre la recta numérica.

Esta situación se puede formular de forma más general diciendo que, dado cualquier par de números racionales a, b siempre hay otro número racional entre ellos. Está claro que $\frac{a+b}{2}$ cumple esta condición, pero, de hecho, hay *una cantidad infinita* de números racionales entre a y b, ya que podemos encontrar números entre a y $\frac{a+b}{2}$, entre $\frac{a+b}{2}$ y b, y así indefinidamente. Esto parece indicar que podemos rellenar toda la línea recta únicamente con la ayuda de estos números racionales si los colocamos suficientemente juntos, pero ¿dónde ponemos entonces los números reales restantes, es decir, todos los irracionales?, ¿queda sitio para hacerlo?

Esta es una pregunta nada trivial y muy interesante que no se planteó hasta el último tercio del siglo XIX, cuando quedó claro que esta propiedad de "densidad" (el hecho de que entre dos números racionales cualesquiera siempre hay una cantidad infinita de números racionales) es diferente de otra propiedad, mucho más fuerte: la "continuidad". El matemático alemán Richard Dedekind fue el primero en establecer claramente esta distinción y mostrar que, mientras que la continuidad aparece con los números reales, esta no es una propiedad de los racionales, que son "solo" densos. Lo hizo en un breve y famoso libro de 1872 titulado *Stetigkeit und irrationale Zahlen* ("Continuidad y Números Irracionales"), en el que por primera vez se definieron rigurosamente los números reales ¡Nótese qué tarde en la historia se clarificaron estas ideas tan fundamentales sobre los números! Tendremos mucho que decir sobre esto.

1.2 Los números imaginarios

Los números naturales, enteros, racionales y reales que hemos introducido antes son los componentes básicos del mundo de los números tal como lo concebimos hoy en día, pero no son los únicos. Hay más nociones que sirven para dividir estos cuatro tipos en subtipos o extenderlos hacia nuevos territorios. Para resolver, por ejemplo, la ecuación $x^2 = 2$, o $x^2 - 2 = 0$, tenemos que introducir, como hemos visto, los números irracionales. Consideremos ahora una ecuación aparentemente similar: $x^2 + 1 = 0$. Para resolverla necesitamos encontrar un número cuyo cuadrado sea -1. Para los no iniciados esto parece absolutamente imposible a primera vista, dado que el producto de dos números reales del mismo signo es siempre positivo. Por esta razón el cuadrado de cualquier número es positivo, así que no puede ser igual a -1. Pero ya sabemos que los matemáticos tienen una forma simple de superar estos obstáculos aparentes: simplemente postulando el número que haga falta y estableciendo así su existencia.

El número en cuestión es una entidad matemática denotada habitualmente con la letra i, que se define como un número que cumple la propiedad $i^2 = -1$. Eso es todo; simplemente postulamos la existencia de un número al que llamamos i, tal que $i = \sqrt{-1}$, de forma que tomando $x = i$, se resuelve automáticamente la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Para ser precisos, no basta con postular la existencia de tal número, también hay que definir una aritmética completa que lo incorpore de forma conveniente, y a la que se pueda extender toda la aritmética de los números reales sin llegar a ningún tipo de contradicción. Esto se puede conseguir con facilidad, pero —como podemos adivinar— para llegar a tal integración fue necesario un largo e intrincado proceso histórico (como veremos en el capítulo 9).

Resulta que, a lo largo de la historia, ha habido matemáticos (a menudo entre los mejores de cada época) cuya idea sobre lo que era un número descartaba rotundamente la posibilidad de que existieran números que fueran “menos que nada”, o que no se pudieran escribir como una fracción, o números que multiplicados por sí mismos dieran números negativos. Una parte importante del contenido de este libro se centra en la forma en la que aparecieron y se desarrollaron estas ideas y cómo y bajo qué circunstancias matemáticas se modificaron gradualmente hasta consolidarse y llegar al concepto actual de número. El caso de $i = \sqrt{-1}$ es quizá el más notorio y le dedicaremos mucha atención, pero no es de ningún modo único. Se eligió originalmente la letra i para representar esta misteriosa entidad porque el número $\sqrt{-1}$ recibió inicialmente el apelativo de “imaginario”.

Con la ayuda de los números imaginarios podemos crear los “números complejos”, compuestos por una parte “real” y otra “imaginaria”. Así, solemos escribir los números complejos como $a + bi$, donde tanto a como b son números reales. Podemos escribir el número complejo $\sqrt{-1}$ como $i = 0 + 1i$, de manera que su parte “real” es 0 y su parte “imaginaria” es 1. Por otro lado, todo número real es también un número complejo cuya parte imaginaria es 0: por ejemplo, el número 35 es $35 + 0i$. La aritmética de los números complejos incluye la aritmética de los números reales, así como la propiedad básica que define a i, que es $i^2 = -1$. A partir de aquí, se deduce, entre otras cosas, que $i^3 = -i$ y que $i^4 = 1$. El conjunto de los números complejos se denota habitualmente con la letra $\mathbb{C}$, y se representa gráficamente sobre el plano tal como se indica en la figura 1.5.

Nótese que en la figura muestro solo unos pocos números concretos: $3, 5 + 2i, -4 + i$ y $1 - \pi i$. Nótese también que en el eje horizontal aparecen los números reales de la misma forma que en las figuras precedentes. Desde una perspectiva histórica la necesidad de preguntarse sobre la posibilidad de hablar de raíces de números negativos fue, en sí misma, una importante fuente de ideas originales —de hecho decisivas— en el camino hacia el concepto moderno de número. Los matemáticos no entendieron completamente los números complejos hasta mediados del siglo XIX. Pero a pesar de sus orígenes aparentemente artificiales, tras su incorporación a las matemáticas, rápidamente se les empezó a dar usos importantes —algo realmente sorprendente— en física y en ingeniería eléctrica. De hecho, áreas importantes como la electrodinámica no alcanzaron la madurez científica hasta que no fueron formuladas en términos matemáticos precisos gracias al uso de los números complejos.

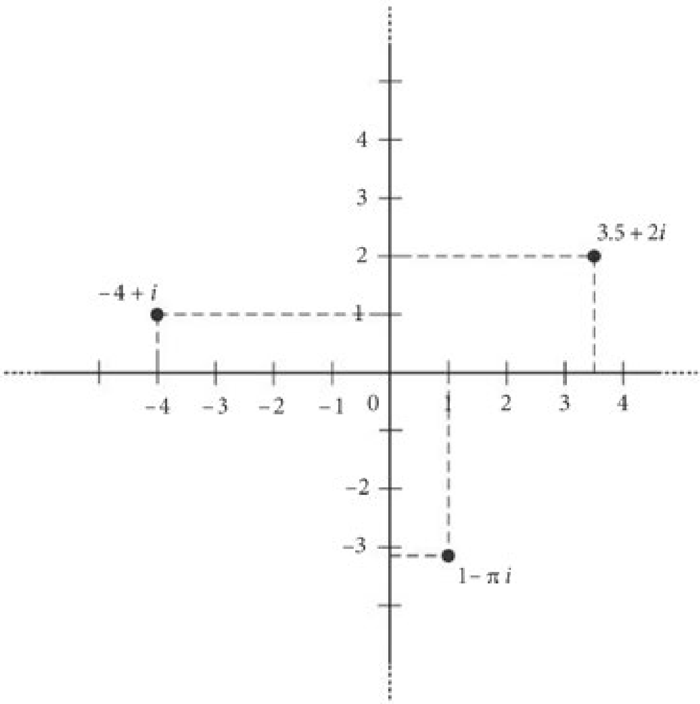

Figura 1.5 Representación gráfica de los números complejos sobre el plano.

1.3 Polinomios y números trascendentes

Hasta ahora he introducido los conceptos más básicos que quiero que todos los lectores tengan en mente en el resto del libro. En lo que resta de capítulo me gustaría presentar otras ideas que añadirán profundidad a la discusión que sigue y atraerán a los lectores más concienzudos (de todas formas, que nadie se preocupe demasiado si algunos de los conceptos que discuto aquí parecen demasiado profundos: los lectores que los encuentren demasiado difíciles pueden saltarse esta sección sin problema).

En la discusión anterior he ido introduciendo de forma sistemática nuevos sistemas numéricos cuando estaba claro que los previamente existentes no nos permitían encontrar soluciones para ciertas ecuaciones. Sin embargo, cabe preguntarse si así hemos encontrado todas las nuevas clases de números necesarias para resolver todas las ecuaciones concebibles. Para responder a esta pregunta hay que fijarse en el tipo de ecuaciones que hemos considerado hasta ahora. Todas son ejemplos de ecuaciones polinómicas, como $x^2 + 2 = 0$, $5x^4 + x^{10} = -8$ y $5x^3 + 8x^{21} = x^{10} + 7$. En ellas aparecen las potencias x^n de un número desconocido x multiplicadas por coeficientes numéricos. Estas ecuaciones se pueden escribir de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0\,.$$

La potencia más alta de la incógnita, el número n, recibe el nombre de "grado" u "orden" del polinomio (y de la ecuación). Cada potencia de la incógnita, x^k, aparece multiplicada por un coeficiente a_k. que puede ser, por ejemplo, un número racional. Uno de los coeficientes, a_0, no multiplica a ninguna potencia de x. Está permitido, además, que algunos de los coeficientes, salvo a_n, sean 0. La mayoría de las ecuaciones que hemos mencionado hasta ahora han sido de grado dos (ecuaciones cuadráticas):

$$x^2 + 1 = 0, \quad x^2 + 3x - 10 = 0, \quad x^2 + 8 = 4, \quad x^2 - 2 = 0.$$

También hay números irracionales que son soluciones de polinomios de grados más altos. Por ejemplo, tras un cálculo tedioso, podemos ver que el número $1 + \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16}$ es solución de una ecuación polinómica de grado cinco, en concreto, de la ecuación

$$x^5 - 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 - 5x - 1 = 0.$$

También he afirmado que el número π, que no parece ser raíz de ningún número racional o una combinación de estas, es de hecho irracional, en el sentido de que no se puede escribir como una fracción con numerador y denominador enteros. Sin embargo, la verdadera diferencia entre π y los demás números irracionales no radica en que se pueda escribir utilizando raíces de números racionales o no, sino en un hecho mucho más profundo y significativo, a saber, ¡que no hay ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales de la que π sea solución!

El descubrimiento de esta intrigante propiedad de π produjo una gran sorpresa cuando fue publicado en 1882 por el matemático alemán Ferdinand von Lindemann (1852-1939), que alcanzó inmediatamente la gloria matemática gracias a ello. La demostración es difícil y su comprensión requiere de conocimientos matemáticos amplios y profundos. En todo caso lo que quiero enfatizar aquí es que estamos hablando de una propiedad matemática muy fuerte y, en cierto sentido, inusual. Es una propiedad de inexistencia o imposibilidad. Probar que tales propiedades se cumplen es, en la mayor parte de las ocasiones, muy difícil. En este caso, lo que Lindemann tuvo que demostrar es que para *cualquier polinomio*, de *cualquier grado* y con *cualesquiera coeficientes racionales*, si sustituimos la incógnita x por π, el resultado *nunca* será 0.

Es obvio que Lindemann no pudo probar la mencionada inexistencia examinando uno a uno todos los polinomios, ya que hay un número infinito de ellos. La demostración tiene que poner de manifiesto alguna propiedad fundamental que cumplan todos los polinomios y que explique tal imposibilidad. Estas son, insisto, matemáticas muy profundas. Desde el punto de vista de nuestra presentación de los distintos sistemas numéricos, lo que el resultado de Lindemann indica es que dentro de los números reales podemos diferenciar dos tipos: números como 2, $\frac{3}{5}$ o $\sqrt{2}$, que se pueden obtener como soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales, y números como π, que no se pueden obtener de esa manera. Los números del primer tipo normalmente reciben el nombre de números algebraicos y pueden ser tanto racionales como irracionales. Aquí denotaremos al conjunto de estos números con la letra $\mathbb{A}$. Los números del segundo tipo reciben el nombre de "números trascendentes" y, por supuesto, son todos irracionales. Otro ejemplo conocido de número trascendente es e, la base de los logaritmos naturales. La prueba de que e es trascendente, que también dista de ser trivial, había sido ya dada en 1873 por el matemático francés Charles Hermite (1822-1901).

La investigación sobre los números trascendentes y sus propiedades es hoy en día un campo matemático muy activo y difícil. Un ejemplo de las preguntas que los matemáticos se hacen sobre este tipo de números es el siguiente: dado cualquier número algebraico, racional o irracional, a (que no sea ni 1 ni 0) y otro número algebraico irracional b, ¿es posible que el número a^b sea trascendente? Esta es, de hecho, una pregunta difícil[1], parecida a otras muchas a las que actualmente los matemáticos están intentando dar respuesta.

[1]Respondida afirmativamente por el Teorema de Gelfond-Schneider (N. de la T.)

Otro hecho importante e interesante relacionado con los números trascendentes es que, dentro de los números reales, hay una cantidad "enormemente mayor" de números trascendentes que de números algebraicos. Esto puede parecer extraño a primera vista, ya que en ambos casos estamos hablando de conjuntos infinitos. ¿En qué sentido un conjunto infinito puede ser mucho mayor que otro conjunto infinito? Como veremos en el capítulo 12, esta afirmación tiene sentido matemático y, de hecho, la demostración de este hecho extraño y sorprendente no es particularmente difícil. Aparece en el apéndice 12.1.

En este punto, y después de haber definido los números complejos y trascendentes, podemos refinar el esquema de la jerarquía del sistema de números, tal y como se muestra en la figura 1.6.

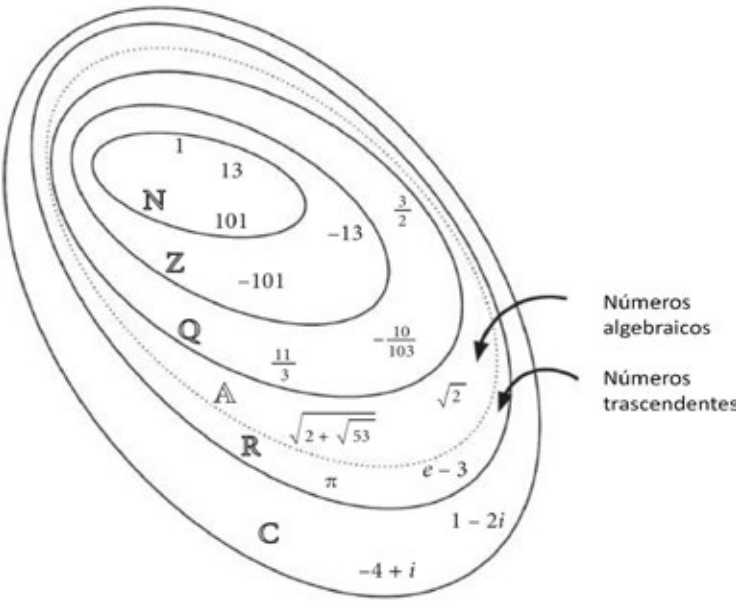

Figura 1.6 Los distintos sistemas numéricos, desde los naturales hasta los complejos (incluyendo los algebraicos y los trascendentes).

Otra pregunta que podemos plantearnos a estas alturas es si es todavía posible encontrar alguna ecuación polinómica que no se pueda resolver con el arsenal de números que nos proporciona el conjunto de los números complejos y todos los otros sistemas numéricos que contiene. Si sucediera esto tendríamos que introducir, como en los pasos previos de nuestra construcción, otro tipo de números que aún no hemos definido. Sin embargo, se puede probar en términos matemáticos muy precisos que no es necesario ir más allá de los números complejos. Esto es, se puede demostrar que, dada una ecuación polinómica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \,.$$

en la que todos los coeficientes a_k *son números complejos*, existe al menos un número complejo que es solución de la ecuación. En otras palabras, en el caso de los números complejos, una ecuación polinómica siempre tiene soluciones en el mismo conjunto de números que usamos para escribirla. Pero nótese que, cuando hablo aquí de coeficientes complejos y soluciones complejas, me refiero a números que también pueden ser naturales, enteros, racionales o reales, dado que, como se muestra en la figura 1.6, los números de estos tipos son también complejos. Por tanto, la ecua-